



# Vers une vision unifiée de la plasticité cristalline

Laurent Tabourot

## ► To cite this version:

Laurent Tabourot. Vers une vision unifiée de la plasticité cristalline. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Savoie, 2001. tel-00178010

**HAL Id: tel-00178010**

**<https://theses.hal.science/tel-00178010>**

Submitted on 9 Oct 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Dossier de candidature Habilitation à Diriger des Recherches

Présenté par  
Laurent TABOUROT  
Maître de conférences 60<sup>ème</sup> section

---

## Vers une vision unifiée de la plasticité cristalline

---

date de soutenance : 3 octobre 2001

### Composition du jury

Jean-Louis CHABOCHE	Président
François LOUCHET	Rapporteur
Jean-Hubert SCHMITT	Rapporteur
Cristian TEODOSIU	Rapporteur
Robert ARRIEUX	Examineur
Edgar RAUCH	Examineur

version 05/12/01 15:45  
impression 09/10/2007 23:28:00  
Habilitation préparée au sein du  
**Laboratoire de Mécanique Appliquée**  
**Equipe d'accueil 1962**  
**Université de Savoie**





## Table de matières

<b>INTRODUCTION GENERALE AU DOSSIER DE CANDIDATURE A L'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES .....</b>	<b>5</b>
1    PRESENTATION DU CANDIDAT .....	5
2    CE QU'EST L'HABILITATION A DIRIGER LES RECHERCHES .....	5
<b>SYNTHESE DES TRAVAUX.....</b>	<b>7</b>
<b>INTRODUCTION SUR L'ACTIVITE RECHERCHE.....</b>	<b>9</b>
<b>PARTIE 1 ASPECTS GENERAUX, NOTATIONS ET RAPPELS.....</b>	<b>7</b>
1 NOTATIONS ET RAPPELS ELEMENTAIRES .....	11
2 DEFORMATION DES METAUX : CONSIDERATIONS ELEMENTAIRES.....	13
3 MOUVEMENT D'UN CORPS DEFORMABLE.....	20
4 CINEMATIQUE DES GRANDES TRANSFORMATIONS.....	25
5 GENERALISATION DE LA NOTION DE CONTRAINTE : ETAT DE CONTRAINTE EN UN POINT .....	27
6 LOI DE COMPORTEMENT.....	31
<b>PARTIE 2 ETUDE PHENOMENOLOGIQUE DE LA PLASTICITE DES METAUX.....</b>	<b>11</b>
1 PRESENTATION DE L'OUTIL DE DETERMINATION DES DEFORMATIONS SURFACIQUES.....	44
2 ANALYSE DE L'ESSAI DE TRACTION .....	47
3 ANALYSE DE LA DEFORMATION EN EXPANSION.....	56
4 SIMULATION D'OPERATIONS D'EMBOUTISSAGE SUR MATERIAU ISOTROPE .....	63
5 ETUDE D'UN CAS LIMITE : LE TITANE .....	67
6 BILAN DE LA PREMIERE PARTIE .....	70
<b>PARTIE 3 DESCRIPTION UNIFIEE DE LA PLASTICITE DES MONOCRISTAUX.....</b>	<b>43</b>
1 MECANISMES ELEMENTAIRES A L'ORIGINE DE LA PLASTICITE .....	72
2 MODELISATION DE LA PLASTICITE DU MONOCRISTAL DE STRUCTURE CFC .....	89
3 LES DIFFERENTES FAÇONS D'INTEGRER CETTE LOI .....	100
4 OBTENTION DE RESULTATS EXPERIMENTAUX SUR MONOCRISTAUX .....	100
5 IDENTIFICATION DE LA LOI DE COMPORTEMENT.....	100
6 POSITIONNEMENT DE CETTE LOI PAR RAPPORT AUX DIFFERENTS MODELES EXISTANTS.....	100
7 CONCLUSION DE LA DEUXIEME PARTIE .....	100
<b>PARTIE 4 VERS LA DESCRIPTION UNIFIEE DE LA PLASTICITE DES AGREGATS CRISTALLINS .....</b>	<b>71</b>
1 EFFET HALL-PETCH .....	100
2 SIMULATION DES MULTICRISTAUX .....	100
3 VERS UNE EXPLOITATION AU NIVEAU MACROSCOPIQUE .....	100
4 CONCLUSION.....	100
<b>CONCLUSION SUR LA SYNTHESE DE RECHERCHE.....</b>	<b>100</b>
1 MODELISATION CLASSIQUE.....	100
2 LA MODELISATION MULTI ECHELLES .....	100
3 BILAN .....	100
<b>PERSPECTIVES / PROJET DE RECHERCHE.....</b>	<b>100</b>
1 MODELISATION .....	100
2 EXPERIMENTATION .....	100
3 SIMULATION .....	100
4 APPLICATION AUX MULTICRISTAUX.....	100
5 BILAN .....	100
<b>BIBLIOGRAPHIE DE L'ACTIVITE RECHERCHE .....</b>	<b>100</b>

<b>VOLET I : LISTE DES PUBLICATIONS ET TRAVAUX.....</b>	<b>100</b>
1 REVUES.....	100
2 ACTES DE CONGRES .....	100
3 COMMUNICATIONS CONGRES/COLLOQUES/SEMINAIRES .....	100
4 REALISATIONS IMPORTANTES .....	100
<b>VOLET II : RECHERCHE : ANIMATION / ENCADREMENT.....</b>	<b>100</b>
1 RESPONSABILITES .....	100
2 ENCADREMENT .....	100
3 CONTRATS RECENTS .....	100
<b>VOLET III : RAYONNEMENT ET POSITIONNEMENT DES TRAVAUX.....</b>	<b>100</b>
1 JURYS DE THESE .....	100
2 PRESENTATIONS INVITEES.....	100
3 COLLABORATIONS ET UTILISATIONS DES TRAVAUX .....	100
4 POSITIONNEMENT DES TRAVAUX .....	100
<b>CONCLUSION AU DOSSIER DE CANDIDATURE .....</b>	<b>100</b>
1 GESTION D'UN PROJET SCIENTIFIQUE.....	100
2 GESTION D'EQUIPE ET ENCADREMENT .....	100
3 BILAN .....	100

# Introduction générale au dossier de candidature à l'habilitation à diriger des recherches

L'habilitation à diriger les recherches (ou HDR) confère à son détenteur la possibilité de diriger et d'encadrer de façon autonome des travaux de recherche. Le dossier de candidature est constitué pour obtenir cet agrément. Il sert de support à l'évaluation globale. Dans cette introduction, une courte présentation du candidat est effectuée puis on rappelle les directives concernant le contenu du dossier de candidature. Consécutivement, on indique le choix et l'organisation retenus pour ce document de candidature.

## 1 Présentation du candidat

### 1.1 Etat civil

- Laurent TABOUROT né le 11 mars 1965 à Clermont dans l'Oise.
- Marié, sans enfant.
- Domicilié à Annecy, France.

### 1.2 Position administrative

- Maître de conférences à l'Université de Savoie depuis 8 ans.
- Rattaché au Laboratoire de Mécanique Appliquée (LMéca) de L'Ecole Supérieure d'Ingénieurs d'Annecy pour l'activité recherche.
- Rattaché au département Génie Mécanique et Productique de l'Institut Universitaire de Technologie d'Annecy le Vieux pour l'enseignement.
- Responsable scientifique de l'équipe "plasticité cristalline" du Laboratoire de Mécanique Appliquée depuis 1 an.
- Responsable pédagogique de la Maîtrise de Technologie Mécanique de l'Université de Savoie depuis 4 ans.

### 1.3 Cursus

Après l'obtention d'une licence et d'une maîtrise de l'université Paris 6, en 1985 et 1986, j'ai été admis au concours externe de l'agrégation de Génie Mécanique en 1987.

J'ai débuté mon activité de recherche scientifique par la préparation et l'obtention d'un DEA de Mécanique de l'Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG). Entre 1988 et 1992, j'ai préparé une thèse de doctorat en tant que boursier docteur ingénieur du CNRS puis comme Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche. Ce travail portait principalement sur l'étude du comportement élastoviscoplastique du monocristal en grandes transformations. J'ai obtenu le diplôme de docteur en Mécanique de l'INPG en 1992. La même année, j'ai été recruté comme Maître de conférences à l'Université de Savoie. Je suis rattaché au département Génie Mécanique et Productique de l'Institut Universitaire de Technologie (IUT) d'Annecy le Vieux. En parallèle, j'enseigne également à l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs d'Annecy en filière Maîtrise de Technologie Mécanique. Je suis également responsable pédagogique de cette filière. J'exerce mon activité de recherche au sein du Laboratoire de Mécanique Appliquée intégré à l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs d'Annecy. Ce laboratoire comporte deux équipes. J'ai intégré l'équipe de recherche dénommée initialement "critère limite en emboutissage des matériaux métalliques en feuilles".

Mes travaux de recherche sont essentiellement axés sur le comportement plastique des matériaux métalliques destinés à l'emboutissage. Je suis actuellement responsable scientifique de l'équipe.

## 2 Ce qu'est l'habilitation à diriger les recherches

L'habilitation à diriger les recherches est un diplôme que peuvent obtenir les maîtres de conférences<sup>1</sup>, après quelques années d'activité. Cette habilitation témoigne d'un niveau élevé caractérisé par :

- Une démarche originale dans un domaine scientifique
- La maîtrise d'une stratégie autonome de recherche scientifique
- La capacité à l'encadrement de jeunes chercheurs

Il autorise, par la suite, les maîtres de conférences habilités à encadrer de façon autonome de jeunes chercheurs en phase de préparation d'un doctorat.

L'habilitation s'obtient après expertise d'un document appelé dossier de candidature et une soutenance devant un jury composé de membres reconnus pour leurs compétences dans le domaine scientifique du candidat. Il s'agit donc ici de préciser et justifier le contenu de ce dossier de candidature à une habilitation à diriger les recherches dans le domaine de la mécanique (60<sup>ème</sup> section).

L'article 4 de l'arrêté du 23 novembre 1988 relatif à l'habilitation à diriger des recherches stipule que "...le

---

<sup>1</sup> ou plus généralement les docteurs ès sciences.

dossier de candidature comprend soit un ou plusieurs ouvrages publiés ou dactylographiés, soit un dossier de travaux, accompagnés d'une synthèse de l'activité scientifique du candidat permettant de faire apparaître son expérience dans l'animation d'une recherche..."

La synthèse que le candidat doit présenter, doit mettre en évidence les activités de recherche, notamment celles effectuées depuis le doctorat, l'obtention de contrats de recherche, la direction d'étudiants de second et troisième cycle, les projets de recherches futurs.

Pour tenir compte de ces différents éléments, j'ai organisé le document support de ma candidature de la façon suivante.

Le **corps principal du rapport** est dédié à la présentation générale de l'activité de recherche. Celle-ci est centrée sur la caractérisation et la modélisation de la plasticité à froid des métaux. Les différents travaux effectués sous ma responsabilité depuis l'obtention de la thèse dans le cadre d'encadrement de stages de maîtrise, DEA et thèse sont présentés.

Afin de ne pas limiter la portée de cette synthèse au seul objectif de l'obtention de l'habilitation à diriger les recherches, différentes options de présentation et de choix de contenu ont été retenues. Par exemple dans la partie synthèse, les concepts généraux propres à chaque sujet sont donnés de façon exhaustive en plus des travaux personnels originaux. Le lecteur accoutumé aux différents concepts de la plasticité pourra naturellement directement lire les parties originales.

L'objectif est également à tous les niveaux de présenter autant que faire se peut les liens entre les différentes théories phénoménologiques et physiques afin de présenter une vision unifiée et cohérente de la plasticité.

Certains travaux originaux présentés dans ce rapport n'ont pas encore fait l'objet de publication par contre pour d'autres, j'ai repris les textes de certaines publications déjà édités, auxquelles j'ai fortement contribué. Ces textes ont été harmonisés, non seulement sur le plan des notations mais aussi des concepts afin de présenter un ouvrage le plus cohérent possible.

Dans cette partie, figurent également les perspectives à moyen terme de ce travail sous forme d'un projet de recherche s'appuyant sur les ressources actuelles du laboratoire.

J'ai reporté **dans différents volets indépendants**, la liste des publications personnelles, la liste des encadrements et des contrats obtenus, les éléments permettant de situer l'activité recherche tant sur le plan national qu'international.

Le dossier se termine par une conclusion générale.

## SYNTHESE DES TRAVAUX

---

---

### VERS UNE VISION UNIFIEE DE LA PLASTICITE CRISTALLINE

---

---

période 1992-2001

Laboratoire de Mécanique Appliquée  
Ecole Supérieure d'Ingénieurs d'Annecy  
Université de Savoie





## Introduction sur l'activité recherche

Ayant intégré l'équipe travaillant initialement sur l'emboutissage et la recherche de critères limites de localisation de la déformation du Laboratoire de Mécanique Appliquée (LMéca), les principaux thèmes développés dans cette synthèse sont donc liés de façon récurrente à l'emboutissage. Depuis une vingtaine d'année, un des enjeux majeurs de la recherche dans ce secteur est d'obtenir des prédictions numériques fiables de la mise en forme pour réduire les coûts de développement des outillages, mieux maîtriser le procédé et connaître les caractéristiques du produit réalisé. La simulation numérique implique le recours à de multiples champs de compétences : étude du frottement, étude de la localisation de la déformation, mise au point de méthodes numériques précises et rapides... Elle nécessite aussi le développement de modèles performants pour décrire le comportement plastique du matériau jusqu'à la localisation de la déformation (striction) ou l'apparition de plissements de la tôle. Malgré les efforts déployés, malgré la qualité des outils actuels, il est frappant de constater combien les prédictions des codes de simulation sont généralement éloignées de la réalité expérimentale, même sur une opération de mise en forme assez simple au prime abord. Il y a donc une réelle difficulté à simuler correctement toute une gamme d'opérations impliquant une histoire complexe du matériau.

Des améliorations doivent être apportées pour que les outils de simulations puissent être utilisés directement et fiablement par les industriels. Les différents domaines impliqués rendent conséquemment les causes de l'insuccès nombreuses. C'est sous l'angle plus restreint de l'étude et la caractérisation du comportement plastique que j'ai souhaité contribuer à fiabiliser les simulations numériques.

La difficulté est alors de prendre pied dans une discipline déjà relativement ancienne où différentes écoles de pensée (associées à différents auteurs : Arrieux, Barlat, Brunet, Considère, Cordebois, Hill, Marciniack, Teodosiu...) génèrent des modélisations qu'on a pris l'habitude d'utiliser sans forcément trop de remise en question. De surcroît, la maîtrise de ces modélisations requiert l'assimilation de nombreux concepts et hypothèses sous-jacents difficiles à réaliser dans un temps restreint. La modélisation du comportement plastique est un champ disciplinaire à la fois vaste et pointu.

Le travail réalisé comporte deux points principaux. Dans un premier temps, on s'attache à utiliser la théorie classique pour en cerner le potentiel et les limites. Il apparaît alors que les modélisations traditionnelles sont essentiellement phénoménologiques et considèrent le matériau comme une entité mathématique idéale. Cette modélisation "oublie" le plus souvent les propriétés physiques du matériau responsables de la plasticité. C'est comme si, à partir du simple fonctionnement apparent d'un moteur, on essayait de modéliser son comportement sans faire analyse de son comportement interne. Cette modélisation quoique rustique est efficace. Elle ne peut cependant avoir un degré de précision suffisant pour être utilisée dans des simulations de plus en plus précises.

Il existe une voie alternative qui tend maintenant à se développer largement. La plupart des propriétés macroscopiques ne peuvent en fait être comprises, prédites voire optimisées qu'en intégrant les phénomènes et mécanismes intervenant à une ou plusieurs échelles inférieures. La modélisation dite multi échelles nécessite donc en partant du niveau macroscopique et en descendant aux échelles inférieures :

- une analyse de l'échelle pertinente de description élémentaire,
- l'étude et l'analyse des mécanismes actifs à cette échelle,
- la mise en place de transition d'échelles pour établir le modèle macroscopique.

C'est ce type de modélisation appliqué à la description du comportement plastique des métaux qui est donc proposé dans un second temps.

Cette synthèse d'activité est organisée de la façon suivante.

Un premier chapitre définit les notations, met en place les différents concepts et effectue les rappels des théories utilisées dans le reste de l'ouvrage.

Dans une deuxième partie, on aborde la plasticité sous l'angle phénoménologique classique par l'étude approfondie de deux modes de déformations : la traction et l'expansion. Tous deux sont présents lors de l'opération de mise en forme de produits laminés. Quelques principes clairs sont alors mis en évidence et utilisés avec succès pour réaliser la simulation d'opérations d'emboutissage, notamment dans le cas simple de matériaux isotropes. La modélisation du comportement plastique de matériaux plastiquement anisotropes ou d'opérations plus complexes semble par contre moins évidente.

Ceci justifie la voie parallèle à la modélisation phénoménologique qui est proposée dans le chapitre 3. Dans cette partie, on expose les principes de mise en œuvre de la modélisation multi échelles. En appliquant ces principes au cas des matériaux de structures cubiques à faces centrées, on aboutit à la détermination de relations physiques identifiées relativement simples pour décrire le comportement plastique du monocristal.

La dernière partie enfin, montre que l'utilisation de ces lois pour la prédiction du comportement d'agrégats polycristallins est possible. Ce résultat illustre modestement que les modélisations multi échelles conduisent à des résultats exploitables et ont certainement un avenir dans la science des matériaux.

La conclusion effectue un bilan critique sur ce travail et permet d'envisager les perspectives associées à un projet centré sur la modélisation multi échelles. Les aspects stratégiques et les contingences matérielles sont également intégrés. Cette toute dernière partie constitue le projet de recherche associé à cette demande d'habilitation.



## PARTIE 1 Aspects généraux, Notations et Rappels

On précise ici les différentes notions qui sont nécessaires lorsqu'on aborde la modélisation du comportement plastique. On précise tout d'abord les différentes notations et résultats mathématiques largement utilisés dans ce domaine (les vecteurs, les tenseurs...) puis on présente les résultats expérimentaux essentiels sur lesquels s'est construite la vision actuelle de la plasticité. Les définitions originales des grandeurs usuelles dans le cas unidimensionnel (contrainte et déformation) sont rappelées. L'extension au cas tridimensionnel est ensuite effectuée. Enfin, on aborde la modélisation du comportement plastique en montrant comment on établit le lien général entre tenseur des contraintes et tenseur des déformations. Quelques modélisations de référence sont alors présentées.

Bien entendu, tous les résultats ne sont pas présentés. Un livre complet n'y suffirait pas ! Il s'agit de donner simplement les éléments fondamentaux significatifs indispensables à la compréhension des thèmes développés dans l'ouvrage. Le lecteur "spécialiste" peut s'abstenir de lire cette première partie.

### Notations et rappels élémentaires

Les résultats sont rappelés sans démonstration. Le milieu qu'on étudie occupe à l'instant  $t=0$  un domaine  $\Omega$  de l'espace euclidien usuel  $E$ . L'espace vectoriel tridimensionnel associé est noté  $V$ . Les vecteurs de  $V$  (déplacement, vitesse...) sont notés en gras. On définit alors les différents opérateurs suivants.

Le **produit scalaire** de deux vecteurs est noté :  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ .

Un repère cartésien est composé d'une base orthonormée de  $V$  :  $\{\mathbf{e}_k\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  et d'un point origine  $O$ .

Alors,  $\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_m = \delta_{km}$   $k, m = 1, 2, 3$

où :

$$\delta_{km} = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = m \\ 0 & \text{pour } k \neq m \end{cases}$$

et  $\delta_{km}$  est désigné par "symbole de Kronecker".

Le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  est appelé vecteur position du point  $M$  appartenant à l'espace euclidien. Les composantes d'un vecteur  $\mathbf{u}$  sont les trois réels uniquement définis par la relation :  $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$ . Le vecteur  $\mathbf{u}$  est défini par ses trois composantes relativement à une base donnée. Ainsi,  $(u_1, u_2, u_3)$  est une représentation de  $\mathbf{u}$  par rapport à  $\{\mathbf{e}_k\}$ .

La notation vectorielle et la notation indicielle sont simultanément utilisées dans ce rapport. Lorsqu'on utilise la notation indicielle, la convention d'Einstein est employée. La sommation est implicite lorsque dans la formule des indices sont répétés. Les indices sont alors supposés décrire l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ . Par exemple si  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont deux vecteurs représentés respectivement par  $(u_1, u_2, u_3)$  et  $(v_1, v_2, v_3)$  alors le produit scalaire s'exprime selon la convention d'Einstein :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_k v_k = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \quad (1)$$

Le **produit vectoriel** de deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  est noté  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ . En fonction des composantes, il est défini par :

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{e}_1 - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \mathbf{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{e}_3, \quad (2)$$

Un tenseur du second ordre  $\mathbf{A}$  est une application linéaire qui assigne à chaque vecteur  $\mathbf{u}$  de l'espace vectoriel un unique vecteur  $\mathbf{v}$  :  $\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{u}$ .

L'ensemble de tous les **tenseurs du second ordre** défini sur  $V$  est appelé  $L$ . On définit les opérateurs suivants sur  $L$ .

La **somme de deux tenseurs**  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  appartenant à  $L$  est définie par :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (3)$$

et le **produit d'un tenseur**  $\mathbf{A}$  appartenant à  $L$  avec un réel  $\alpha$  par :

$$(\alpha \mathbf{A})\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{u}), \quad (4)$$

L'espace  $L$  muni des deux opérations est également un espace vectoriel. Le tenseur unitaire  $\mathbf{1}$  et le tenseur nul  $\mathbf{0}$  sont alors définis par les relations :  $\mathbf{1}\mathbf{u} = \mathbf{u}$  et  $\mathbf{0}\mathbf{u} = \mathbf{0}$  quel que soit  $\mathbf{u} \in V$  et  $\mathbf{0}$  est le vecteur nul.

Le **produit tensoriel** de deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ , noté  $\otimes$  est le tenseur du second ordre défini par :  $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w} = \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$  quel que soit  $\mathbf{w} \in V$

Les produits tensoriels  $\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m$ ,  $k, m = 1, 2, 3$  forment une base de  $L$ . Chaque tenseur de  $L$  s'écrit :

$$\mathbf{A} = A_{km} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m. \quad (5)$$

Les neuf composantes  $A_{km}$  sont les composantes cartésiennes du tenseur  $\mathbf{A}$ . On montre que

$$A_{km} = \mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{A}\mathbf{e}_m). \quad (6)$$

Si  $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}$ , alors  $v_k = A_{km}u_m$

Le **produit de deux tenseurs**  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  est défini par la règle :

$$(\mathbf{AB})\mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{u}) \quad \text{quel que soit } \mathbf{u} \in V, \quad (7)$$

$$(\mathbf{AB})_{km} = A_{kp}B_{pm}$$

Le **tenseur transposé** d'un tenseur  $\mathbf{A} = A_{km} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m$  se définit par :

$$\mathbf{A}^T = A_{mk} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m, \quad (8)$$

Un tenseur du second ordre est symétrique si  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$  et un tenseur est antisymétrique si  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ . Les parties symétriques et antisymétriques d'un tenseur  $\mathbf{A}$  sont alors définies par :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{sym} &= \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \\ \mathbf{A}^{asym} &= \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \end{aligned} \quad (9)$$

Si on prend un tenseur antisymétrique  $\mathbf{\Omega}$ , il existe un unique vecteur  $\boldsymbol{\omega}$  tel que :  $\mathbf{\Omega}\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$  avec  $\boldsymbol{\omega} = -\Omega_{23}\mathbf{e}_1 + \Omega_{13}\mathbf{e}_2 - \Omega_{12}\mathbf{e}_3$

La **trace du tenseur**  $\mathbf{A}$  est le nombre réel :

$$tr\mathbf{A} = A_{mm}, \quad (10)$$

Le **produit scalaire** de tenseurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  est le nombre réel :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = tr(\mathbf{AB}^T) = A_{km}B_{km}. \quad (11)$$

Le **déterminant** du tenseur  $\mathbf{A}$  est défini par :

$$\det \mathbf{A} = \det[A_{km}], \quad (12)$$

où  $[A_{km}]$  est la matrice des composantes cartésiennes de  $\mathbf{A}$ . Si  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , il existe une transformation linéaire inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  de  $V$  telle que si  $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}$  alors  $\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}$ ,  $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^2$ . De ces deux équations, on déduit que :  $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1}$

$\mathbf{A}^{-1}$  est appelé **tenseur inverse** de  $\mathbf{A}$ .

Un tenseur  $\mathbf{Q}$  est appelé **tenseur orthogonal** si :

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{1} \text{ ou } Q_{kp}Q_{mp} = \delta_{km}$$

Pour ce type de tenseur, on a  $\det \mathbf{Q} = \pm 1$ . Chaque tenseur orthogonal admet un tenseur inverse :  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$

Un nombre réel  $\lambda$  est **valeur principale du tenseur** du second ordre  $\mathbf{A}$  s'il existe un vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  tel que  $\mathbf{A}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}$ . Dans ce cas  $\mathbf{n}$  est appelé direction principale correspondant à la valeur  $\lambda$ . On peut montrer que si  $\mathbf{A}$  est symétrique, alors il existe une base orthonormée  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$  et 3 valeurs principales  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  de  $\mathbf{A}$  telle que :

$$\mathbf{A} = \sum_1^3 \lambda_k \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k . \quad (13)$$

Ce théorème est très important pour l'étude des solides déformables car on utilise plusieurs tenseurs symétriques (déformation et contrainte).

Si  $x_1, x_2, x_3$  désignent les coordonnées cartésiennes d'un point  $P \in E$  relativement à ce repère, la position  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$  s'écrit :  $\mathbf{x} = x_k \mathbf{e}_k$

La dérivée partielle est notée  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_k} = (\cdot)_{,k}$ . Une fonction qui affecte à chaque point  $P \in E$  un scalaire, un vecteur ou un tenseur  $\Phi(P)$  est appelé champ scalaire, vectoriel ou tensoriel. Si  $F$  désigne un champ scalaire, alors le **gradient de  $F$**  est le champ vectoriel défini par :

$$\mathbf{grad}(F) = F_{,m} \mathbf{e}_m . \quad (14)$$

Soit  $\mathbf{u}$  un champ vectoriel. Le **gradient de  $\mathbf{u}$**  est le tenseur du second ordre :

$$\mathbf{grad}(\mathbf{u}) = u_{k,m} . \quad (15)$$

La **divergence de  $\mathbf{u}$**  est le champ scalaire :

$$\text{div}(\mathbf{u}) = \text{tr}(\mathbf{grad}(\mathbf{u})) = u_{m,m} . \quad (16)$$

On définit le gradient symétrique de  $\mathbf{u}$  par :

$$\mathbf{grad}(\mathbf{u})^{sym} = \frac{1}{2} (u_{k,m} + u_{m,k}) \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m . \quad (17)$$

### Déformation des métaux : considérations élémentaires

Les premiers concepts liés à l'étude du comportement élastoplastique des métaux sont établis historiquement à partir de l'essai de traction. On utilise cet essai afin de préciser les notions initiales attachées à l'étude et la modélisation de la plasticité des métaux.

#### B-a ba

On distingue (au moins) deux modes de déformation des matériaux métalliques soumis à un chargement. Le mode élastique (figure 1) correspond à un chargement qui ne provoque aucune modification de forme après disparition de la force appliquée.

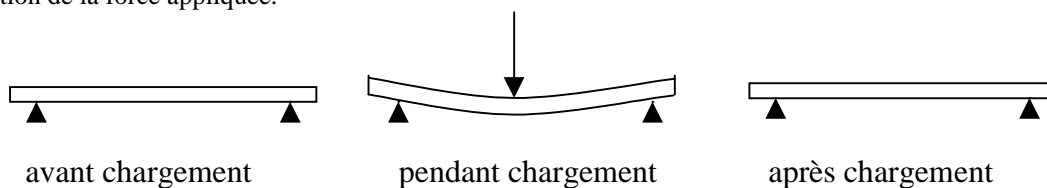


Figure 1 : Cas d'une déformation purement élastique.

L'augmentation de la valeur de la charge conduit, à partir d'un moment donné, à l'observation d'une déformation permanente ou plastique (figure 2) après suppression du chargement.

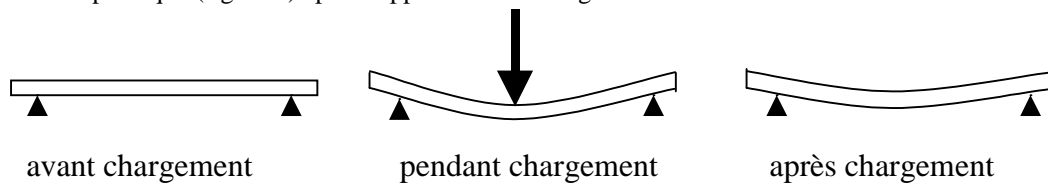


Figure 2 : Cas d'une déformation permanente ou plastique.

Il existe de nombreuses façons de déformer les matériaux pour obtenir et étudier la déformation plastique. L'essai le plus utilisé jusqu'à maintenant est sans aucun doute l'essai de traction. Il se pratique au moyen d'une machine d'essai (figure 3). Il a été largement pratiqué en raison de sa simplicité de mise en œuvre. De surcroît, l'homogénéité apparente des déformations au cours de l'essai (dont une mesure est donnée par un extensomètre) rend plus aisée l'analyse des résultats.



Figure 3 : Machine de traction de type Instron 50 kN utilisée pour la plupart des essais au laboratoire.

C'est à partir des résultats d'un essai de traction que nous allons définir les premiers concepts utilisés pour l'étude du comportement des matériaux ductiles lors de déformations imposées à froid.

L'éprouvette est installée entre le mors fixe et le mors mobile. Le déplacement de la traverse mobile entraîne la déformation contrôlée de l'éprouvette. L'effort appliqué est mesuré au moyen d'une cellule de force montée en série entre le bâti et un des mors. Les deux aspects, mesure d'effort et mesure de déplacement, sont primordiaux. Ce sont les seules grandeurs directement mesurables sur un essai de ce type. Toutes les autres grandeurs de la mécanique sur lesquelles nous reviendrons (contrainte, déformation...) sont le résultat d'un calcul à partir de ces grandeurs initiales. Cette conversion est effectuée dans le cadre d'hypothèses définies (homogénéités des déformations par exemple). La courbe caractéristique force-déplacement obtenue lors d'un essai de traction sur un matériau métallique dépend du matériau utilisé. L'exemple de la figure 4 est issu d'un essai sur l'aluminium de pureté 99,5%. C'est un matériau ductile : il supporte de grandes déformations plastiques sans rupture brutale.

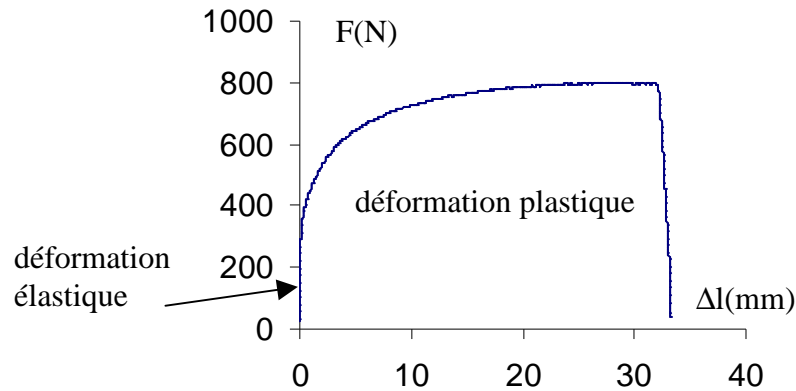


Figure 4 : Courbe force appliquée - déplacement de traverse d'une éprouvette polycristalline de traction Al99,5 déformée en traction à la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{s}^{-1}$ .

Cette courbe s'interprète de la façon suivante. En dessous de 300 MPa, les déformations sont élastiques. Lorsqu'on relâche la charge, l'éprouvette reprend sa forme initiale. Au-dessus de 300 MPa, la déformation devient plastique. Un allongement permanent irréversible est mesuré après suppression de la charge. L'accroissement de la déformation plastique nécessite l'augmentation de la charge appliquée. Ce phénomène de durcissement est appelé écrouissage. Les déformations élastiques restent très inférieures aux déformations plastiques ; elles sont à peine perceptibles à l'échelle de la figure. En fin d'essai, pour des déformations plastiques importantes, il se produit une localisation de la déformation qui conduit progressivement à la rupture. Plusieurs causes en sont à l'origine. Les conditions aux limites ont par exemple une incidence sur la localisation de la déformation. Elle est également imputable à une éventuelle modification des mécanismes internes de déformations. On utilise, par exemple, le terme endommagement lorsque des micro fissurations se développent à l'intérieur du matériau et conduisent à une modification de ses propriétés plastiques apparentes (le plus souvent traduite par une diminution de l'écrouissage moyen).

La courbe force-déplacement n'est absolument pas intrinsèque au matériau. On définit alors des grandeurs spécifiques dans le but d'obtenir des relations indépendantes des conditions d'essai. On utilise alors les grandeurs contrainte (liée à l'effort) et déformation (liée au déplacement) présentées dans les paragraphes suivants. La relation entre la contrainte et la déformation décrit le comportement local intrinsèque du matériau.

#### Mesure de déformation

Pour s'affranchir (partiellement) des conditions géométriques de l'essai, on définit une mesure de déformation. On appelle  $\Delta L$  l'allongement en traction d'une portion  $L_0$  de l'éprouvette non-déformée. La mesure de déformation longitudinale est, par définition, le rapport de l'allongement  $\Delta L$  divisé par  $L_0$ . On obtient alors la déformation nominale de l'éprouvette.

$$\epsilon_n = \frac{\Delta L}{L_0}, \quad (18)$$

Une autre mesure de la déformation, largement utilisée, est la déformation logarithmique ou déformation vraie.

$$\epsilon_v = \ln\left(1 + \frac{\Delta L}{L_0}\right), \quad (19)$$

Bien sûr, ces mesures sont représentatives du comportement local si la déformation est homogène dans la longueur  $L_0$ . Alors, on suppose que la déformation en un point est la même que celle calculée à partir de l'extensomètre. Pour assurer une homogénéité correcte des déformations, on est amené à réaliser des éprouvettes dont les formes concentrent la déformation dans une zone calibrée (ou zone utile). La figure 5 donne un exemple de géométrie utilisée pour une éprouvette de traction.



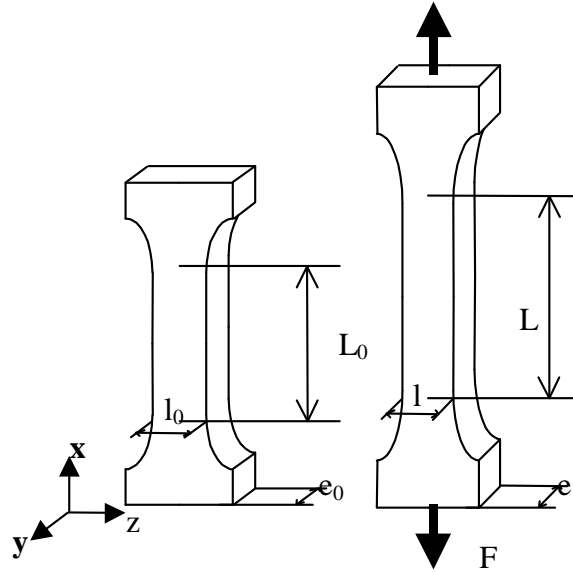


Figure 5 : Exemple de forme d'éprouvette pour obtenir une zone de déformation homogène.

La mesure de la déformation est alors obtenue à partir de l'information de déplacement fournie par un extensomètre. Les bras articulés sont solidarisés avec l'éprouvette dans la zone calibrée, de préférence en position symétrique par rapport au centre.

#### Mesure de contrainte

La force appliquée à l'éprouvette dépend de la géométrie initiale de l'échantillon. Pour obtenir une mesure intrinsèque liée à l'effort, on divise cette force par la section perpendiculaire de l'éprouvette. Cette grandeur homogène à une pression est la contrainte longitudinale. A un instant donné, cette contrainte est supposée identique en tout point considéré de la zone utile. Historiquement, on a divisé la force  $F$  appliquée à l'éprouvette par la section initiale  $S_0 = e_0 l_0$  pour obtenir la contrainte nominale  $\sigma_n$  :

$$\sigma_n = \frac{F}{S_0}. \quad (20)$$

L'utilisation des éléments finis a consacré l'usage de la contrainte vraie  $\sigma_v$  qui rapporte la force appliquée à la section courante  $S$  de l'éprouvette évoluant avec la déformation. Cette contrainte est également désignée par contrainte de Cauchy ou encore "engineering stress" :

$$\sigma_v = \frac{F}{S}. \quad (21)$$

Le lien entre ces deux contraintes est établi en considérant qu'un volume donné de matière reste constant lorsqu'il est déformé plastiquement. On néglige les variations de volume provoquées par les déformations élastiques. Le volume initial  $V_0$  est alors égal au volume courant  $V$  :

$$V_0 = e_0 l_0 L_0 = e l L = V. \quad (22)$$

On en déduit que :

$$\frac{S_0}{S} = \frac{L}{L_0} = 1 + \varepsilon_n. \quad (23)$$

Le lien entre les contraintes est alors obtenu :

$$\sigma_v = \sigma_n (1 + \varepsilon_n), \quad (24)$$

Pour des petites déformations, il n'y a pas nécessité de distinguer contrainte nominale et contrainte vraie qui sont pratiquement égales. L'utilisation des grandeurs contraintes et déformations appliquées pour l'essai de traction fournit une représentation -a priori- plus intrinsèque (exemple figure 6) du comportement local du matériau.

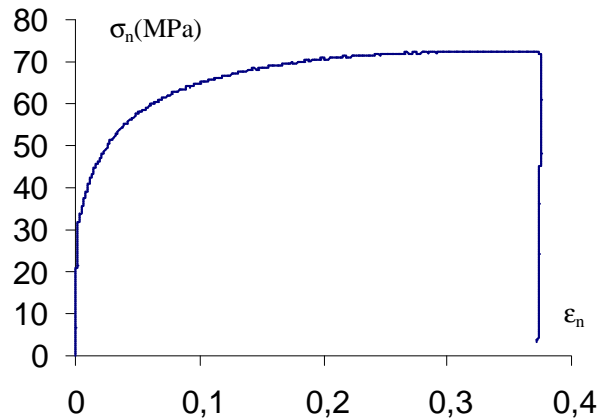


Figure 6 : Exemple de courbe contrainte nominale déformation nominale pour une éprouvette polycristalline de traction Al99,5 déformée en traction à la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{s}^{-1}$ .

### Modélisation sommaire

Ces modélisations sont les premières qu'on a utilisées pour décrire analytiquement le comportement d'une éprouvette métallique soumise à de la traction.

#### Comportement élastique

Dans le domaine élastique la déformation longitudinale est proportionnelle à la contrainte. Ce comportement est traduit par la relation unidimensionnelle :

$$\sigma = E\epsilon, \quad (25)$$

E est appelé module d'Young et est exprimé en MPa. On définit également  $\sigma_e$  la contrainte limite entre le domaine élastique et le domaine plastique.

#### Comportement plastique

Les mécaniciens ont souvent cherché une représentation analytique du domaine plastique des courbes obtenues en traction. Le tableau ci-dessous donne les modélisations courantes qu'on trouve dans la littérature

Hollomon	$\sigma = K\epsilon^n$
Ludwick	$\sigma = \sigma_0 + K\epsilon^n$
Swift	$\sigma = K(\epsilon + \epsilon_0)^n$
Ramberg Osgood	$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + k\left(\frac{\sigma}{E}\right)^n$
Legoff Saada	$\sigma = A + \ln(\epsilon + \epsilon_0)$

Tableau 1 : Différentes relations utilisées pour décrire la courbe contrainte déformation en traction.

L'intérêt<sup>2</sup> de ces formulations réside dans une identification aisée pour une approximation qui semble raisonnable. Cependant elles ont des limitations qu'il ne faut pas oublier. Elles ne sont valables que pour des déformations qui doivent être homogènes dans la zone de longueur  $L_0$ . Le domaine des petites déformations n'est pas correctement décrit.

#### Localisation

On cherche à déterminer s'il existe une condition sous laquelle les déformations se localisent. La courbe force déplacement présente une propriété remarquable : la force imposée par la machine de traction sur l'éprouvette

<sup>2</sup> Certaines entreprises (Irsid) ne souhaitent plus utiliser ces modèles (ou d'autres) et se tournent vers l'utilisation de modèles physiques

passer par un maximum. Ce maximum marque le début de la localisation de la déformation.

Il est possible de transposer ces considérations sous forme d'une condition sur l'écroutissement. La variation de force appliquée à l'éprouvette vaut :

$$dF = d\sigma \cdot S + \sigma \cdot dS . \quad (26)$$

Lorsque l'effort passe par un maximum, on a  $dF = 0$ . En utilisant  $S = le$  (surface = largeur  $\times$  épaisseur), on obtient :

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{dS}{S} = -\frac{dl}{l} - \frac{de}{e} . \quad (27)$$

Les déformations plastiques se font sans variation du volume  $V = L \times l \times e$  :  $dV = 0$  donc :

$$\frac{dL}{L} = -\frac{dl}{l} - \frac{de}{e} = d\varepsilon , \quad (28)$$

d'où la condition de localisation obtenue en combinant les équations (28) et (27) :

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma . \quad (29)$$

Lorsque la pente de la courbe d'écroutissement en un point est égale à la valeur correspondante de contrainte, le matériau se déforme sans accroissement d'effort supplémentaire. Cette relation a été déterminée la première fois par Considère en 1950.

Les études faites en plasticité ont souvent pour objectif de prédire la localisation de la déformation. Les deux mots : "homogène" et "localisation", sont en complète opposition. On comprend alors que l'utilisation de ces équations "moyennes" obtenues en supposant le comportement homogène sur l'éprouvette pour prédire la localisation plastique présente quelques risques pour la qualité du résultat final. On retiendra que la mesure des grandeurs mécaniques localisées doit être certainement appréhendée d'une autre façon pour l'étude de la localisation.

## Autres essais pour aborder la plasticité

### *Autres aspects liés à l'essai de traction*

L'essai de traction ne met en évidence qu'un aspect restreint du comportement plastique des matériaux. En effet, il s'agit d'un chargement monotone avec une seule direction d'effort. D'autres particularités du comportement sont néanmoins mises en évidence simplement en utilisant cet essai. On utilise par exemple une séquence traction suivie d'une compression pour mettre en évidence l'effet Bauschinger. La limite élastique à la recharge est le plus souvent moins importante que la limite en traction. Lorsqu'on impose cette alternance un grand nombre de fois, on passe en sollicitation cyclique. Le comportement en fatigue associé n'est pas étudié ici. Un autre mode de sollicitation consiste à appliquer une force et observer le comportement du matériau. Ce sont les propriétés de fluage qui sont ainsi mesurées.

### *Autres essais pratiqués sur les métaux*

Différents essais visent à obtenir un champ de déformation homogène de déformation pour caractériser le comportement plastique. On donne quelques essais mécaniques représentatifs.

#### Essai de cisaillement

Cet essai n'est pas encore très pratiqué. On applique une force tangentielle à une éprouvette dans le but d'obtenir une contrainte tangentielle (figure 7). C'est un autre moyen d'observer le comportement plastique. La localisation de la déformation se produit plus tardivement avec ce genre d'essais. Au moins deux points importants sont à signaler. La longueur cisailée doit être importante par rapport à la hauteur de façon à minimiser le couple parasite induit par les efforts de cisaillement. De plus, les deux zones d'extrémités ne sont pas en cisaillement en raison du bord libre.

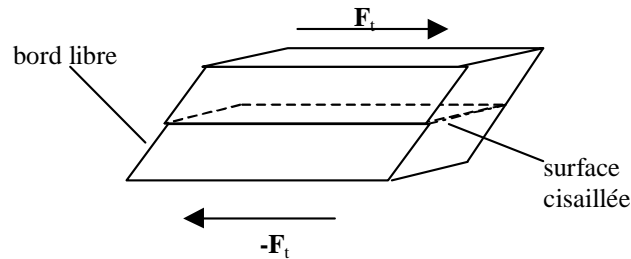


Figure 7 : Configuration idéale de l'essai de cisaillement

#### Essai de torsion

C'est un essai associé au précédent puisque le mode de déformation est lié au cisaillement. Il est de mise en œuvre plus commode. Les essais de torsion sont pratiqués sur des tubes (figure 8). La distribution des contraintes et des déformations radiales est d'autant plus importante que l'écart entre le diamètre intérieur et le diamètre extérieur est grand.

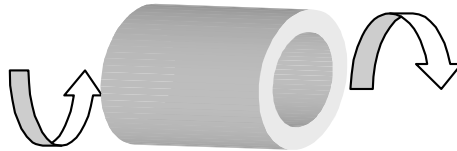


Figure 8 : Configuration de l'essai de torsion.

#### Essai d'expansion

Cet essai est longuement commenté dans la suite du rapport. Il ne fait pas l'objet de présentation dans cette partie.

#### Mise en forme des métaux par déformation plastique

Les propriétés plastiques des métaux sont utilisées dans le procédé de mise en forme par emboutissage. La matière première se présente sous forme de feuilles de métal obtenues à partir de lingots laminés. Les opérations sont effectuées à l'aide de presses mécaniques ou hydrauliques sur lesquelles on monte différents outillages.

L'outil se compose au moins de trois éléments principaux (voir figure 9) :

- le poinçon qui délimite le contour intérieur,
- la matrice qui délimite le contour extérieur,
- le serre flanc qui, en pressant sur le métal contre la matrice, évite son plissement et contrôle son écoulement le long du poinçon.

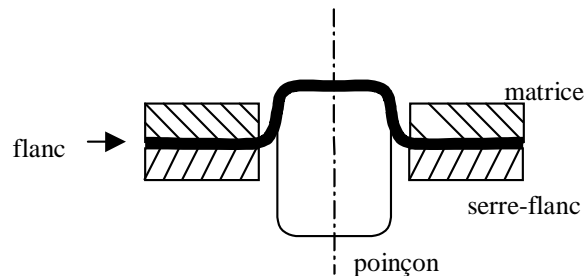


Figure 9 : Eléments constitutifs d'un outillage sommaire d'emboutissage.

Les pièces embouties peuvent être très complexes et nécessiter une dizaine d'opérations successives pour parvenir au produit final. La conception des outillages est délicate. Il faut maîtriser la déformation du métal pour éviter les localisations. Il est possible de jouer sur différents paramètres pour contrôler le processus :

- nombres de passes,
- ordre des opérations,

- état de surface des outils,
- lubrification,
- serrage du serre-flanc,
- matériau.

Tous ces facteurs se combinent pour rendre parfois très complexe la mise au point de l'opération. Le procédé d'emboutissage est utilisé pour la production de pièces en grandes séries. Les outillages sont réalisés dans des matériaux très durs et résistants à l'usure. Le coût de l'outillage est très important. Il est important de le réaliser correctement du premier coup. Il n'existe malheureusement pas de règles très claires pour l'élaboration d'un outillage. Une meilleure compréhension du comportement plastique est indispensable pour rationaliser l'étude des outillages.

Les développements analytiques proposés ci-dessus pour décrire la plasticité sont unidimensionnels et ne peuvent servir à modéliser une opération de mise en forme. La modélisation globale de la plasticité étend cette description pour traiter des chargements complexes. L'objet des pages suivantes est la présentation de la théorie qui définit la notion de limite élastique et le formalisme analytique de l'écroutissage dans un cas général.

### Mouvement d'un corps déformable

Cette partie a pour objectif d'une part de rappeler (de façon condensée) les notions fondamentales en mécanique des milieux continus déformables et d'autre part de préciser les notations adoptées tout au long de l'ouvrage. L'approfondissement des notions présentées peut être effectué en consultant les ouvrages spécifiques : [38], [60] ou [56].

#### Concept de Milieu continu

La mécanique des milieux continus implique la définition d'un volume élémentaire sur lequel on définit des valeurs de grandeurs internes. Il y a ici une certaine difficulté qui n'est pas toujours bien précisée et dont on doit souligner le particularisme. Théoriquement, ce volume doit être le plus petit possible car les grandeurs internes sont obtenues quand le volume tend vers 0. Par contre d'un point de vue pratique, il est difficile de mettre en œuvre ce principe car les valeurs des grandeurs changent en fonction de la taille du volume considéré. A l'échelle phénoménologique ou macroscopique, la contrainte par exemple, requiert la définition d'un volume qui ne descend pas en dessous de plusieurs grains. Elle est alors une contrainte moyenne. Lorsqu'on étudie des agrégats en utilisant une loi cristalline, le volume considéré est alors plus petit (nécessairement inférieur à la taille du grain) mais doit être suffisant pour comporter un nombre suffisant de dislocations pour pouvoir définir une densité moyenne de dislocations. La taille du volume considéré situe l'échelle de travail et de la description. Dans la plupart des ouvrages, on désigne le volume adapté à l'échelle de description par volume élémentaire représentatif (V.E.R.). Une définition rigoureuse est pratiquement impossible à trouver. Pragmatiquement, ce volume est le plus petit volume pour lequel un comportement moyen local est identifiable et transposable à un volume supérieur dans des conditions homogènes. Pour un polycristal, on considère un volume qui englobe plusieurs grains en nombre suffisant pour être représentatifs des caractéristiques matériaux. Toute la partie qui suit suppose l'existence d'un tel volume sur un ensemble de grains du polycristal étudié.

#### Mouvement d'un corps solide déformable

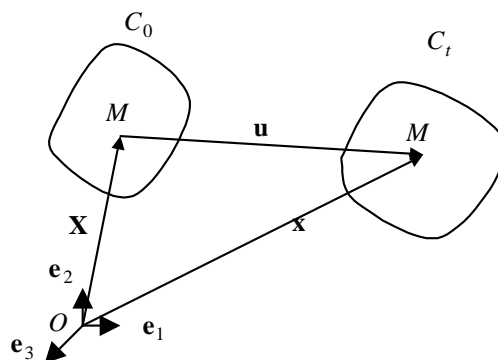


Figure 10 : Définition des différentes grandeurs cinématiques.

On étudie le mouvement d'un corps déformable au cours du temps dans un espace à trois dimensions (figure 10). Au temps  $t=0$ , les particules sont dans la configuration initiale repérée par  $C_0$ . La configuration du même corps

au temps  $t$  est  $C_t$ .  $M$  identifie la position d'une particule.  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{x}$  sont les vecteurs position du même point matériel  $M$  dans les configurations respectives  $C_0$  et  $C_t$ . Le déplacement de la particule est donné par le vecteur déplacement  $\mathbf{u}$ . Le mouvement du corps est donné par :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t). \quad (30)$$

Le mouvement d'un corps solide est une transformation inversible. Pour  $t$  donné, la transformation inverse est définie par :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t). \quad (31)$$

Les composantes cartésiennes  $X_k$  de la particule matérielle  $\mathbf{X}$  sont appelées coordonnées matérielles ou lagrangiennes alors que les coordonnées  $x_k$  de la même particule matérielle  $\mathbf{x}$  au temps  $t$  sont appelées coordonnées spatiales ou eulériennes.

La vitesse d'un point matériel est définie par :

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (32)$$

N'importe quel champ scalaire, vectoriel ou tensoriel peut être considéré soit comme une fonction de la position initiale  $\mathbf{X}$  et du temps  $t$  soit comme une fonction de la position courante  $\mathbf{x}$  et du temps  $t$  si la relation (31) existe.

$$\Phi(\mathbf{X}, t) = \hat{\Phi}(\mathbf{x}, t). \quad (33)$$

Ces deux descriptions possibles sont respectivement appelées description matérielle et description spatiale. Le gradient et la divergence d'un champ calculés par rapport à la configuration matérielle sont notés **Grad** et **Div** (avec une lettre majuscule) alors que les symboles **grad** et **div** (sans majuscule) sont utilisés lorsque le calcul est effectué par rapport à la configuration spatiale. Les dérivées matérielles sont notées  $\frac{d}{dt}$  ou en utilisant un point superposé sur la lettre représentant la grandeur. Par exemple, on obtient la vitesse et l'accélération de la particule  $\mathbf{X}$  de la façon suivante :

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{dt}, \quad (34)$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{dt^2}.$$

Les dérivées spatiales sont, quant à elles, notées  $\frac{\partial}{\partial t}$ . Ce sont des dérivées partielles si les coordonnées spatiales  $x_k$  sont constantes.

Si  $\Phi(P)$  désigne un champ scalaire, vectoriel ou tensoriel dépendant de  $\mathbf{x}$  et de  $t$  alors sa dérivée matérielle s'exprime :

$$\frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \hat{\Phi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}. \quad (35)$$

Par exemple, l'accélération est calculée à partir du champ de vitesse en description eulérienne  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  :

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{grad}(\mathbf{v}))\mathbf{v}. \quad (36)$$

### Tenseur des déformations

La grandeur essentielle de cinématique non-linéaire est le gradient de la transformation. Ce gradient donne une

image de la façon dont se déforme le milieu autour d'une particule donnée (figure 11).

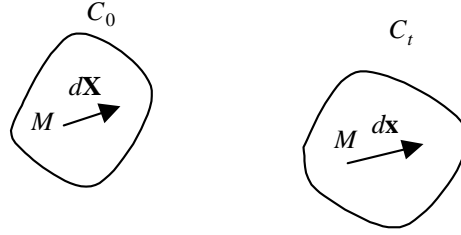


Figure 11 : Paramètres pour la mesure de déformation.

La fonction  $\mathbf{F}$  définit l'application tangente qui donne l'évolution d'un vecteur  $d\mathbf{x}$ , d'origine  $M$ , au cours du temps.  $\mathbf{F}$  est le gradient de la transformation :

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)d\mathbf{X} \quad dx_k = F_{km}dX_m, \quad (37)$$

où  $\mathbf{F}$  est un tenseur du deuxième ordre, défini par

$$\mathbf{F} = \text{Grad}(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{t=cste} \quad F_{km} = \frac{\partial x_k}{\partial X_M}. \quad (38)$$

#### *Théorème de décomposition polaire*

Ce théorème est présenté sans démonstration.

Tout tenseur du deuxième ordre inversible  $\mathbf{F}$  possède seulement deux décompositions multiplicatives :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (39)$$

dans lesquelles  $\mathbf{R}$  est un tenseur orthogonal et  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont symétriques définis positifs :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^T \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \quad \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{1} \quad (40)$$

Si  $\mathbf{F}$  est le gradient de la transformation,  $\mathbf{R}$  est appelé le tenseur rotation et  $\mathbf{U}$  (resp.  $\mathbf{V}$ ), le tenseur droit (resp. gauche) des elongations. Les tenseurs définis par :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2, \quad (41)$$

sont appelés les tenseurs de Cauchy-Green droit et gauche de la transformation.

#### *Changement de longueur*

L'étude des changements de longueur donne un sens aux composantes diagonales des tenseurs de déformation.

Soit  $dL$  la distance initiale entre deux particules de vecteurs positions  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$  dans la configuration  $C_0$ .

La nouvelle distance  $dl$  dans la configuration  $C_t$  est la distance entre ces mêmes particules données par les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ . Plusieurs mesures déterminent la façon dont s'est "étirée" la matière, en ramenant, par un moyen ou un autre, la longueur déformée  $dl$  à la longueur initiale  $dL$ .

Une première méthode consiste à différencier le carré des longueurs. Dans ce cas, l'utilisation des relations (37) donne la différence des longueurs au carré en fonction du vecteur  $d\mathbf{X}$  :

$$dl^2 - dL^2 = [(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1})d\mathbf{X}] \cdot d\mathbf{X} \quad (42)$$

$$dl^2 - dL^2 = (C_{km} - \delta_{km})dX_k dX_m.$$

Cette procédure introduit le tenseur  $\mathbf{E}$  des déformations de Green-Lagrange dont l'expression est :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}), \quad (43)$$

Le rapport des distances est une autre façon d'appréhender la déformation du corps déformable au point  $M$ . On définit l'étirement (ou l'elongation) par le facteur  $\Lambda_N$  :

$$\Lambda_N = \frac{dl}{dL}. \quad (44)$$

Si  $\mathbf{N}$  définit le vecteur unitaire colinéaire au vecteur  $d\mathbf{X}$  ( $\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{X}}{dL}$ ), alors l'étirement se calcule au moyen du tenseur de Cauchy-Green droit :

$$\Lambda_N = \sqrt{(\mathbf{C}\mathbf{N}) \cdot \mathbf{N}} \quad (45)$$

Par similitude avec la mesure de déformation longitudinale adoptée pour l'essai de traction, une mesure de déformation dans la direction  $\mathbf{N}$  est :

$$\varepsilon_N = \frac{dl - dL}{dL} = \Lambda_N - 1. \quad (46)$$

Dans la direction du vecteur unitaire  $\mathbf{e}_1$ , l'application de la relation précédente donne :

$$\varepsilon_1 = \Lambda_1 - 1 = \sqrt{C_{11}} - 1. \quad (47)$$

#### Changement d'angle

L'étude des changements d'angles (figure 12) permet de percevoir l'aspect concret lié aux composantes hors diagonale des tenseurs associés à l'étude de la déformation.

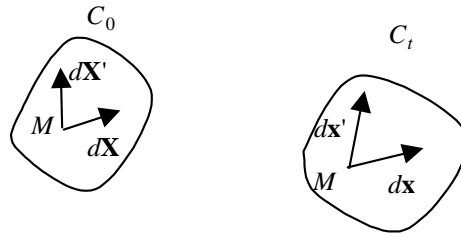


Figure 12 : Paramètres cinématiques pour le calcul des changements angulaires autour du point matériel M.

On calcule le cosinus de l'angle entre  $d\mathbf{x}$  et  $d\mathbf{x}'$  en fonction des vecteurs  $d\mathbf{X}$  et  $d\mathbf{X}'$  dans la configuration initiale :

$$\cos(d\mathbf{x}, d\mathbf{x}') = \frac{(\mathbf{C}\mathbf{N}) \cdot \mathbf{N}'}{\Lambda_N \Lambda_{N'}}, \quad (48)$$

où  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{N}'$  sont les vecteurs unitaires colinéaires à  $d\mathbf{X}$  et  $d\mathbf{X}'$ .

Dans le cas particulier où  $d\mathbf{X} = \mathbf{e}_1$  et  $d\mathbf{X}' = \mathbf{e}_2$ , le cosinus de l'angle formé par les vecteurs  $d\mathbf{x}$  et  $d\mathbf{x}'$  dans la configuration  $C_t$  vaut :

$$\cos(\theta_{12}) = \frac{C_{12}}{\Lambda_1 \Lambda_2}. \quad (49)$$

L'interprétation des différents paramètres cinématiques évoqués dans les deux paragraphes précédents est donnée figure 13.



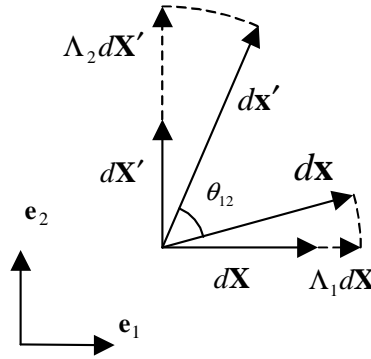


Figure 13 : Interprétation des grandeurs cinématiques.

### Tenseur gradient des vitesses de déformations

Par définition, le tenseur gradient des vitesses par rapport à la configuration déformée vaut :

$$\mathbf{L} = \mathbf{grad}(\mathbf{v}) \quad L_{km} = \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \quad (50)$$

On démontre aisément que le gradient des vitesses est lié au gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  par :

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}, \quad (51)$$

On utilise fréquemment la décomposition du gradient des vitesses en une partie symétrique  $\mathbf{D}$  (tenseur des vitesses de déformation) et une partie antisymétrique  $\mathbf{W}$  (tenseur des vitesses de rotation) :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \\ \mathbf{W} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \end{aligned} \quad (52)$$

### Changement de volume

Le changement d'un volume  $dV$  de la configuration  $C_0$  en un volume  $dv$  dans la configuration  $C_t$  s'obtient en utilisant la valeur absolue  $J$  du déterminant du tenseur  $\mathbf{F}$  :

$$dv = JdV, \quad (53)$$

### Vecteur déplacement

Alors que pour les grandes transformations, le tenseur vitesse de déformation est la quantité cinématique la plus importante, le vecteur déplacement  $\mathbf{u}$  (voir figure 10) devient intéressant lorsqu'on linéarise les équations dans le cas de petits déplacements :

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad x_k = X_k + u_k. \quad (54)$$

Les composantes du tenseur gradient de la transformation s'expriment alors :

$$F_{km} = \frac{\partial x_k}{\partial X_m} = \delta_{km} + \frac{\partial u_k}{\partial X_m}. \quad (55)$$

Le tenseur  $\mathbf{H}$  désigne le gradient des déplacements. Ses composantes sont définies par :

$$H_{km} = \frac{\partial u_k}{\partial X_m}. \quad (56)$$

Toutes les grandeurs tensorielles définies jusqu'à présent sont exprimables en fonction de  $\mathbf{H}$ , par exemple :

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{H} \quad (57)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T),$$

### Linéarisation dans le cas des petits déplacements

On suppose que les déplacements des particules sont petits. Cette condition est traduite par  $|\mathbf{H}| \ll 1$ . On néglige alors les termes du 2<sup>ème</sup> ordre dans les grandeurs cinématiques. On définit alors le tenseur des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (ou des déformations infinitésimales) par l'approximation au premier ordre de l'équation définissant le tenseur de Green Lagrange  $\mathbf{E}$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) \approx \mathbf{E} \quad \varepsilon_{km} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_m} + \frac{\partial u_m}{\partial X_k} \right) \quad (58)$$

ainsi que le tenseur des petites rotations (ou des rotations infinitésimales) par :

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^T) \quad \omega_{km} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_m} - \frac{\partial u_m}{\partial X_k} \right) \quad (59)$$

Les tenseurs de Cauchy Green droit et gauche ont alors les approximations suivantes :

$$\mathbf{C} \approx \mathbf{B} \approx \mathbf{1} + 2\boldsymbol{\varepsilon} \text{ avec } \mathbf{U} \approx \mathbf{V} \approx \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (60)$$

et le tenseur rotation  $\mathbf{R}$  est approché par :

$$\mathbf{R} \approx \mathbf{1} + \boldsymbol{\omega} \quad (61)$$

L'interprétation des composantes des tenseurs est maintenant simplifiée. Dans la direction du vecteur unitaire  $\mathbf{x}_1$ , l'allongement est donné par :

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{11} \quad (62)$$

et les changements angulaires par :

$$\cos(\theta_{12}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{12}\right) \approx \frac{\pi}{2} - \theta_{12} \approx 2\varepsilon_{12} \quad (63)$$

Il existe un vecteur instantané de rotation  $\mathbf{w}^r$  tel que

$$\boldsymbol{\omega}\mathbf{x} = \mathbf{w}^r \times \mathbf{u} \quad (64)$$

et

$$\begin{aligned} w_1^r &= -\frac{1}{2}(\omega_{23} - \omega_{32}) \\ w_2^r &= -\frac{1}{2}(\omega_{31} - \omega_{13}) \\ w_3^r &= -\frac{1}{2}(\omega_{12} - \omega_{21}) \end{aligned} \quad (65)$$

On obtient le mouvement d'un corps solide ( $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ ) si et seulement si le champ de déplacement s'exprime de la façon suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}^r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (66)$$

où  $\mathbf{u}_0$  et  $\mathbf{w}^r$  sont des vecteurs constants et  $\mathbf{x}_0$  définit la position d'un point fixe. On constate que le mouvement de corps solide est composé d'une translation  $\mathbf{u}_0$  et d'une rotation de vecteur  $\mathbf{w}^r$  et de centre le point fixe de coordonnées  $\mathbf{x}_0$ .

### Cinématique des grandes transformations

L'étude du comportement plastique à froid des métaux implique l'utilisation d'un cadre cinématique plus

spécifique. Les particularités sont :

- grandes transformations,
- existence de configurations pour lesquelles la déformation plastique est plus facile à considérer (axes d'orthotropie d'une tôle par exemple),
- petites déformations élastiques.

On décompose alors le gradient de la transformation totale  $\mathbf{F}$  (figure 10) en partie élastique et plastique selon un schéma très classique aujourd'hui [54], [90].

#### Décomposition du gradient de la transformation

On utilise une décomposition générale de  $\mathbf{F}$ , le gradient de la transformation en un point sous forme de contributions purement élastique et purement plastique. Les différentes déformations qui sont définies sont alors relatives à un repère cartésien  $(O, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  attaché par exemple au laboratoire ou à la machine d'essai et font intervenir différentes configurations intermédiaires du voisinage autour du point  $M$ .

$C_0$  est la configuration de départ et  $C_t$  la configuration d'arrivée.

La partie plastique pure de la déformation est appliquée à une configuration locale isocline initiale  $\bar{C}_0$ , idéale, non-déformée du voisinage du point considéré. C'est à cette configuration qu'on applique la déformation plastique pure. C'est pourquoi cette configuration est choisie de telle sorte que l'orientation cristallographique moyenne se conserve lorsque la déformation plastique est appliquée. Le gradient de transformation plastique pure est désigné par  $\mathbf{F}^P$ . La configuration locale déformée obtenue est appelée  $\bar{C}_t$ .

Pour passer de l'élément de volume initial non déformé de la configuration  $\bar{C}_0$  à la configuration de départ  $C_0$ , on applique une rotation de corps rigide  $\mathbf{R}_0$ . La transformation qui fait passer la configuration déformée plastiquement  $\bar{C}_t$  à la configuration finale  $C_t$  est désignée par  $\mathbf{F}^e$ . Cette déformation supporte, le cas échéant, la partie thermoélastique de la transformation globale. Finalement, la décomposition globale de la transformation élastoviscoplastique est donnée sur la figure 14.

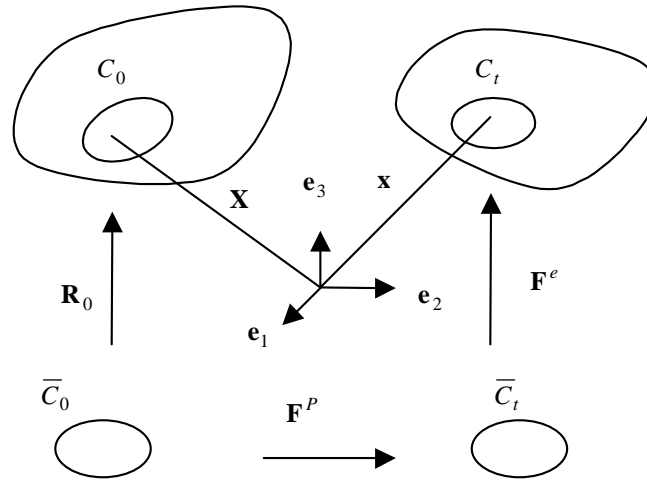


Figure 14 : Décomposition de la déformation en partie élastique et plastique.

La décomposition multiplicative du gradient de la transformation totale s'écrit :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^P \mathbf{R}_0^T. \quad (67)$$

Le gradient de la vitesse  $\mathbf{L}$  s'obtient en dérivant la relation précédente par rapport au temps :

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \text{grad} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{e-1} + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^P \mathbf{F}^{P-1} \mathbf{F}^{e-1}, \quad (68)$$

Cette relation montre que dans le cas général, le gradient de la vitesse n'est pas décomposable en une partie purement élastique et une partie purement plastique, à moins que les déformations et les rotations élastiques soient suffisamment petites pour remplacer  $\mathbf{F}^e$  par le tenseur unité dans le deuxième terme. On choisit néanmoins d'appeler respectivement  $\mathbf{L}^E$  et  $\mathbf{L}^P$  le premier terme et le deuxième terme du membre droit de l'équation (68).

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \mathbf{L}^E + \mathbf{L}^P \\
\mathbf{L}^E &= \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{-1} \\
\mathbf{L}^P &= \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1} \mathbf{F}^e
\end{aligned} \tag{69}$$

Il reste maintenant à particulariser ce schéma au cas des transformations à froid avec les caractéristiques mentionnées plus haut.

### Spécificité de la mise en forme à froid

Pour la plupart des procédés de mise en forme à froid des métaux, les déformations élastiques sont petites devant l'unité, alors que les rotations de corps rigides sont importantes comme l'illustre l'exemple du pliage de la figure 15.

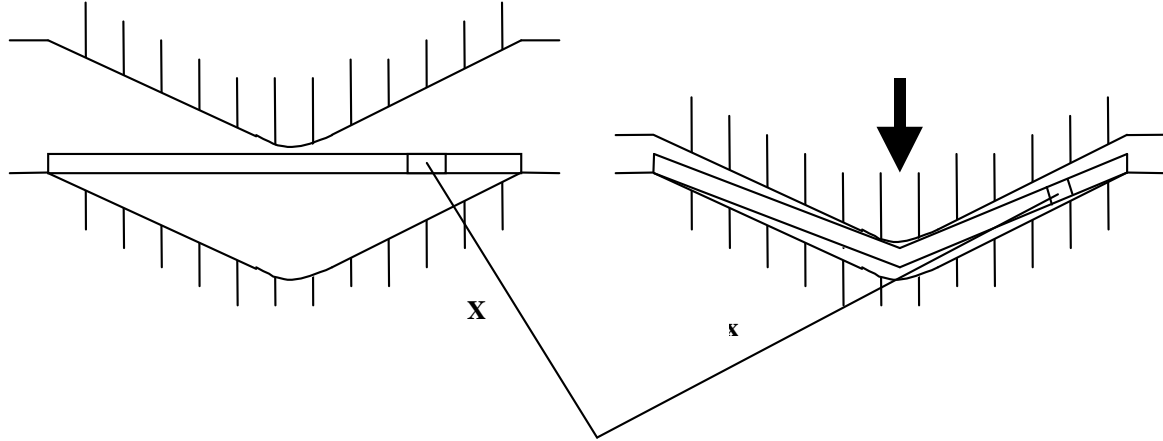


Figure 15 : Pliage à froid d'une tôle illustrant les grandes rotations que subit un élément de volume au cours de la transformation.

C'est pourquoi on utilise la décomposition polaire de  $\mathbf{F}^e$  sous la forme

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{V}\mathbf{R}, \tag{70}$$

où  $\mathbf{R}$  est un tenseur de rotation orthogonal qui vaut  $\mathbf{R}_0$  pour  $t = 0$  et  $\mathbf{V}$  un tenseur symétrique de déformation pure décomposé à son tour, sous la forme

$$\mathbf{V} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{avec } |\boldsymbol{\varepsilon}| \ll 1 \tag{71}$$

En introduisant les relations (70) et (71) dans l'expression du gradient de vitesse (68) et en négligeant les termes du second ordre en  $\boldsymbol{\varepsilon}$  devant ceux du premier ordre dans  $\mathbf{L}^E$  et ceux du premier ordre devant l'unité dans l'expression de  $\mathbf{L}^P$ , on obtient :

$$\mathbf{L}^E = \overset{o}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \overset{o}{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T, \quad \text{avec } \overset{o}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T - \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\boldsymbol{\varepsilon} \tag{72}$$

et

$$\mathbf{L}^P = \mathbf{R}\dot{\mathbf{F}}^p\mathbf{F}^{p-1}\mathbf{R}^T, \tag{73}$$

On a ainsi déterminé le cadre cinématique usuel, utilisé dans le cadre des grandes transformations à froid des métaux. C'est ce schéma qui est utilisé dans les codes de simulations éléments finis tels que le logiciel Abaqus™. Ce schéma se simplifie à volonté selon différentes hypothèses : pas de rotations, pas de déformations élastiques...

### Généralisation de la notion de contrainte : état de contrainte en un point

Les contraintes sont liées aux forces de cohésion à l'intérieur de tout solide. Leurs principales propriétés sont obtenues par des considérations d'équilibre. La présentation s'axe donc sur ces principes pour définir l'état de contrainte en un point.

#### Vecteur contrainte

On considère un solide en traction soumis à l'action de deux forces opposées. On pratique une coupe virtuelle

d'angle quelconque avec l'horizontale qui ôte par exemple la partie gauche du solide (le plan de coupe est perpendiculaire au plan  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ). Pour maintenir l'équilibre de la partie droite, on applique des forces élémentaires  $d\mathbf{F}(M)$ ,  $M \in S$  qui correspondent aux efforts internes de la partie gauche sur la partie droite lorsque le solide n'est pas coupé. Ces forces s'appliquent sur une surface  $dS$  caractérisée par sa normale  $\mathbf{n}$ . On suppose que le point  $M$  est défini par son vecteur position  $\mathbf{x}$  dans la configuration déformée. L'ensemble des forces élémentaires vérifie :

$$\int_S d\mathbf{F} = \mathbf{F}, \quad (74)$$

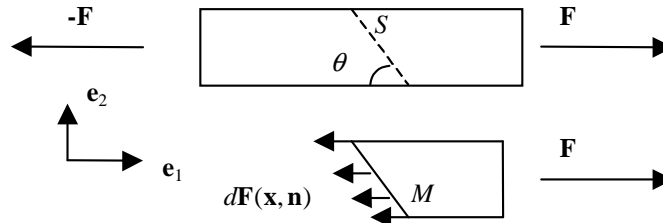


Figure 16 : Solide en traction sous l'application de deux forces.

Dans ce cas où les efforts internes sont constants sur la surface, on considère que  $d\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  est constant quelque soit  $M$ .

On appelle vecteur contrainte la limite du rapport  $d\mathbf{F}$  sur  $dS$  pour une orientation donnée lorsque on fait tendre  $dS$  vers 0 :

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{F}}{dS} = \frac{\mathbf{F}}{S}, \quad (75)$$

On note qu'on rencontre ici le problème de définition lié à la limite évoqué dans le précédent paragraphe. En un point donné, le vecteur contrainte est décomposé en une contrainte normale à la surface et une contrainte tangentielle à la surface (voir figure 17).

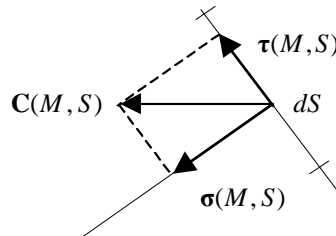


Figure 17 : Décomposition du vecteur contrainte en une composante normale et une composante tangentielle.

En faisant varier l'angle de coupe de la surface, on se rend compte que le point  $M$  (ou son voisinage) subit localement et selon l'orientation de la surface, une sollicitation qui varie de la traction pure ( $\theta = 90^\circ$ ) en passant par une traction et un cisaillement combinés ( $\theta = 45^\circ$  par exemple) jusqu'à disparaître ( $\theta = 0^\circ$ ). L'ensemble des vecteurs contraintes défini au point  $M$  en faisant varier l'orientation de  $S$  caractérise l'état de contrainte au point  $M$ .

#### Etat de contrainte autour d'un point

La formalisation de ces concepts s'effectue de différentes façons. Assez souvent, on utilise comme support un petit cube de matière homogène, centré au point  $M$  considéré et soumis à des contraintes homogènes en surface (voir figure 18).

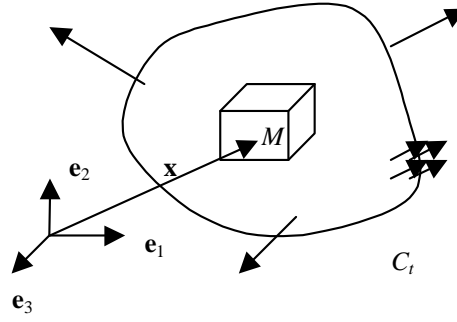


Figure 18 : Définition d'un cube de matière à l'intérieur d'un volume  $V$ .

Lorsqu'on "prélève" ce cube, les forces pour maintenir son équilibre modélisent les interactions avec la matière environnante. Sur chaque face du cube, on obtient donc un vecteur contrainte.

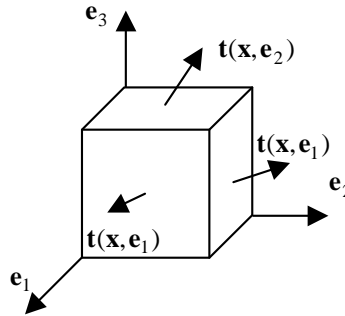


Figure 19 : Représentation tri dimensionnelle de l'état de contrainte en un point.

Si on décompose par exemple le vecteur contrainte  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1)$  suivant les trois directions des vecteurs de base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) &= (\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + (\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 + (\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3 \\ &= \sigma_{11} \mathbf{e}_1 + \sigma_{12} \mathbf{e}_2 + \sigma_{13} \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (76)$$

$\sigma_{ij}$  est la projection sur l'axe  $\mathbf{e}_j$  du vecteur contrainte de la face de normale  $\mathbf{e}_i$ . Cette procédure appliquée aux 6 faces du cube entraîne le recensement de 18 valeurs  $\sigma_{ij}$  différentes. En fait ces valeurs ne sont pas indépendantes. Les conditions d'équilibre du cube apportent des conditions entre les différentes projections :  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  et  $\sigma_{ii} = -\sigma_{-i-i}$ . Le nombre de valeurs indépendantes pour décrire complètement l'état de contrainte autour du point est donc 6. On considère alors les contraintes sur les 3 faces de normale  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$ . Le vecteur contrainte dépend linéairement de la direction normale à la surface. Pour une surface de normale unitaire  $\mathbf{n}$ , les composantes  $t_i$  du vecteur contrainte sont :

$$t_i(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \sigma_{ij} n_j, \quad (77)$$

dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  avec le cube choisi sur la figure 19. Les composantes  $\sigma_{ij}$  sont finalement celles d'un tenseur symétrique du second ordre noté  $\boldsymbol{\sigma}$ . Dans la base, ce tenseur est représenté par la matrice de composantes :

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (78)$$

#### Invariant du tenseur des contraintes

Comme le tenseur des contraintes est symétrique, il existe un repère  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$  où la représentation du tenseur est diagonale :

$$[\sigma]_{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (79)$$

Dans un repère donné, on trouve les valeurs des contraintes principales en résolvant l'équation :

$$\det[\sigma - \sigma_i \mathbf{1}] = 0, \quad (80)$$

équivalant à l'équation du 3<sup>ème</sup> degré :

$$\sigma_i^3 - I_1 \sigma_i^2 - I_2 \sigma_i - I_3 = 0, \quad (81)$$

les valeurs  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  sont indépendantes du choix de la base dans laquelle est exprimé le tenseur  $\sigma$  et valent :

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{Tr}(\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left[ (\text{Tr}(\sigma))^2 - \text{Tr}(\sigma^2) \right] = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{12}^2. \\ I_3 &= \det(\sigma) \end{aligned} \quad (82)$$

En pratique, pour un tenseur  $\mathbf{x}$  donné, il est plus usuel de prendre les invariants suivants déterminés à partir de combinaison linéaire des 3 précédents :

$$\begin{aligned} x_I &= \text{Tr}(\mathbf{x}) = x_{11} + x_{22} + x_{33} \\ x_{II} &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{x}^2) = \frac{1}{2} x_{ij} x_{ij} \\ x_{III} &= \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{x}^3) = \frac{1}{3} x_{ij} x_{jk} x_{ki} \end{aligned} \quad (83)$$

En plasticité non dépendante de la pression volumique, on utilise le plus souvent une fonction des invariants du déviateur des contraintes  $\sigma_D$ . Le déviateur est le tenseur  $\sigma$  auquel on a retranché la pression moyenne :

$$\sigma_D = \sigma - \frac{1}{3} \text{Tr}(\sigma) \mathbf{1}. \quad (84)$$

### Définition des différents tenseurs des contraintes

Le tenseur des contraintes défini ci-dessus par rapport à la configuration déformée est le tenseur de Cauchy. Il s'apparente à la contrainte vraie. Le traitement en grande transformation impose de considérer d'autres tenseurs des contraintes qui font référence à la description matérielle comme la contrainte nominale. On donne ici de façon exhaustive les différents tenseurs utilisés en mécanique.

#### Tenseur de Cauchy

Soit  $d\mathbf{F}$  la force exercée sur l'élément d'aire  $ds$  orientée par la normale  $\mathbf{n}$  dans la configuration  $C_t$ . Le vecteur contrainte de Cauchy est défini par :

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{F}}{ds}. \quad (85)$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy relie le vecteur contrainte  $\mathbf{t}$  et la normale  $\mathbf{n}$  :

$$\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n}, \quad (86)$$

#### Premier tenseur de Piola Kirchhoff

Lorsqu'on rapporte la force  $d\mathbf{F}$  à la surface initiale  $dS_0$  de normale  $\mathbf{n}_0$  dans la configuration  $C_0$ . On obtient le vecteur contrainte nominale. Le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  est défini par :

$$\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{F}}{dS_0} = \mathbf{t} \frac{ds}{dS_0}. \quad (87)$$

Le vecteur contrainte  $\mathbf{s}$  est lié à la normale  $\mathbf{N}_0$  de la surface  $dS_0$  par le premier tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  :

$$\mathbf{s} = \mathbf{S}\mathbf{N}_0, \quad (88)$$

La relation entre le tenseur de Cauchy et le premier tenseur de Piola-Kirchhoff est donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma} = j\mathbf{S}\mathbf{F}^T, \quad j = \det \mathbf{F}^{-1} \quad (89)$$

#### *Second tenseur de Piola-Kirchhoff*

Comme le premier tenseur de Piola-Kirchhoff n'est pas symétrique, on définit un second tenseur de Piola-Kirchhoff qui est symétrique :

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}, \quad J = \det \mathbf{F} \quad (90)$$

### **Loi de comportement**

Il s'agit maintenant de formuler les liens qui existent entre les déformations plastiques et élastiques et le tenseur des contraintes en un point du matériau.

#### **Loi de comportement élastique**

La loi de comportement plastique définit la relation entre les déformations élastiques et le tenseur des contraintes appliquées.

On se place dans le cadre d'une loi de comportement élastique linéaire. Le tenseur des contraintes est alors une fonction linéaire du tenseur des déformations. L'analyse thermodynamique, non traitée ici, montre de façon générale que les composantes du tenseur des contraintes sont les dérivées d'une forme quadratique définie positive des composantes du tenseur des déformations.

Le point de départ pour l'établissement de la loi de comportement adaptée aux spécificités des métaux est alors la loi générale hyperélastique qui donne le tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff en fonction de la densité d'énergie élastique par unité de volume.

#### *Relation générale*

Le point de départ est la loi générale hyperélastique qui lie le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff à la densité d'énergie élastique  $W$  par unité de volume. La densité d'énergie élastique est elle-même une fonction qui dépend de  $\mathbf{E}$ , le tenseur de Green-Lagrange :

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}. \quad (91)$$

La formulation variationnelle adoptée la plupart du temps pour traiter les problèmes aux limites rend plus intéressant la relation qui lie la variation du tenseur des contraintes et un tenseur lié aux taux de déformation. On montre ici quels sont les calculs qui sont menés pour exprimer la relation entre la dérivée de Truesdell, liée à la variation de l'état de contrainte, et le tenseur vitesse de déformation élastique  $\mathbf{D}^E$  la partie symétrique de  $\mathbf{L}^E$ .

La forme de  $W$  dépend évidemment de la configuration de référence choisie pour exprimer la relation. Pour être utilisable dans le cadre de la décomposition proposée au paragraphe 0, l'application de la relation (91) à la transformation  $\mathbf{F}^e$  de  $\bar{C}_t$  à  $C_t$  se fait en remplaçant  $\mathbf{\Pi}$  par  $\bar{\mathbf{\Pi}}$ , le tenseur de Piola-Kirchhoff associé à  $\bar{C}_t$  et  $\mathbf{E}$  par  $\mathbf{E}^e$ , le tenseur de Green-Lagrange associé à la transformation élastique de  $\bar{C}_t$  à  $C_t$ . On a alors :

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = \frac{\partial W(\mathbf{E}^e)}{\partial \mathbf{E}^e}, \quad (92)$$

avec

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = J^e \mathbf{F}^{e-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}, \quad J^e = \det(\mathbf{F}^e). \quad (93)$$

La dérivée de cette relation s'exprime en utilisant la dérivée de Truesdell  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  :

$$\dot{\bar{\mathbf{\Pi}}} = J^e \mathbf{F}^{e-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F}^{e-T}, \quad (94)$$

et



$$\ddot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{L}^E \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{L}^E)^T + \text{tr}(\mathbf{L}^E) \boldsymbol{\sigma}, \quad (95)$$

La dérivée temporelle de (92) est :

$$\dot{\bar{\Pi}} = \frac{\partial^2 W(\mathbf{E}^e)}{\partial \mathbf{E}^e \partial \mathbf{E}^e} : \mathbf{F}^T \mathbf{D}^E \mathbf{F}^e, \quad (96)$$

Des relations (94) et (96), on déduit que la dérivée de Truesdell  $\ddot{\boldsymbol{\sigma}}$  est liée au tenseur de la vitesse de déformation élastique  $\mathbf{D}^E$  par le tenseur  $\mathbf{K}^E$  :

$$\ddot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{K}^E \mathbf{D}^E, \quad (97)$$

avec :

$$\mathbf{K}^E = (J^e)^{-1} \mathbf{F}^e (\mathbf{F}^e \frac{\partial^2 W(\mathbf{E}^e)}{\partial \mathbf{E}^e \partial \mathbf{E}^e} \mathbf{F}^{eT}) \mathbf{F}^{eT}, \quad (98)$$

La forme de  $\mathbf{K}^E$  s'obtient en développant  $W$  en série de Taylor par rapport à  $\mathbf{E}^e$  et en tenant compte que  $\bar{C}_t$  est une configuration locale relâchée, c'est-à-dire libre de toute contrainte. On a :

$$W(\mathbf{E}^e) = \frac{1}{2} \bar{c}_{ijkl}^E E_{ij} E_{kl} + \frac{1}{6} \bar{C}_{ijklmn}^E E_{ij} E_{kl} E_{mn} + \dots \quad (99)$$

d'où on déduit :

$$\frac{\partial^2 W(\mathbf{E}^e)}{\partial \mathbf{E}^e \partial \mathbf{E}^e} = \bar{c}_{ijkl}^E + \frac{1}{6} \bar{C}_{ijklmn}^E E_{mn}, \quad (100)$$

$\bar{\mathbf{c}}^E$  est le tenseur des constantes élastiques de deuxième ordre et  $\bar{\mathbf{C}}^E$  le tenseur des constantes élastiques de troisième ordre relativement à la configuration  $\bar{C}_t$ . Les tenseurs  $\bar{\mathbf{c}}^E$  et  $\bar{\mathbf{C}}^E$  sont symétriques. Nous utilisons une fois de plus l'hypothèse des petites déformations pour réduire la complexité de l'expression de  $\mathbf{K}^E$  :

$$\mathbf{F}^e = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{R}, \quad |\boldsymbol{\varepsilon}| \ll 1. \quad (101)$$

La relation (98) est alors approchée avec une erreur du deuxième ordre en  $\boldsymbol{\varepsilon}$  par :

$$\mathbf{K}^E = \mathbf{c}^E. \quad (102)$$

L'expression des composantes de  $\mathbf{c}^E$  est donnée par :

$$c_{ijkl}^E = R_{ip} R_{jq} R_{km} R_{ln} \bar{c}_{pqmn}^E, \quad (103)$$

les indices variant tous de 1 à 3 et la sommation est effectuée sur les indices répétés.

#### Cas isotrope

Dans le cas d'un matériau élastique isotrope, le tenseur des constantes élastiques est invariant à une rotation près et se met sous la forme suivante :

$$c_{ijkm}^E = \lambda \delta_{ij} \delta_{km} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk}) = \bar{c}_{ijkm}^E. \quad (104)$$

Les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  sont appelés coefficients de Lamé. Si les rotations ne sont pas prises en compte, on obtient alors une forme simplifiée classique entre le tenseur des contraintes et le tenseur des petites déformations élastiques  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}_e] \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_e. \quad (105)$$

La relation réciproque est :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}] \mathbf{1}. \quad (106)$$

La constante  $E$  est le module d'Young déjà mentionné plus haut et  $\nu$  désigne le coefficient de Poisson. La

relation entre les différents coefficients des relations ci-dessus est donnée ci-après :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (107)$$

#### Notation de Voigt

Les tenseurs utilisés dans les lois de comportement sont symétriques dans la configuration de référence. Il est avantageux d'utiliser une notation qui diminue le nombre d'opérations de calcul. La notation de Voigt qui associe judicieusement chaque paire d'indices avec un seul nombre a cette bonne propriété :

$$11 \# 1, 22 \# 2, 33 \# 3, 23 \# 4, 13 \# 5, 12 \# 6. \quad (108)$$

Ainsi la matrice des constantes élastiques est donnée de façon simplifiée par :

$$c_{ijk}^E = C_{IJ}^E. \quad (109)$$

Les composantes des tenseurs des contraintes et des déformations sont quant à elles remplacées avec la règle suivante :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\sigma}_I, \quad 2D_{kl}^E = (1 + \delta_{ij})D_I^E. \quad (110)$$

La relation (97) s'écrit finalement :

$$\tilde{\sigma}_I = C_{IJ}^E D_J^E, \text{ ou } D_J^E = C_{IJ}^{E-1} \tilde{\sigma}_I, \quad (111)$$

les indices I et J variant cette fois-ci de 1 à 6. Par exemple, pour les matériaux au comportement élastique orthotrope (comportement élastique invariant si on place le matériau dans des positions symétriques par rapport à deux plans particuliers perpendiculaires), la matrice  $[C_{IJ}^{E-1}]$  :

$$[C_{IJ}^{E-1}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \quad (112)$$

Le matériau est caractérisé par :

- 3 modules d'Young  $E_1, E_2, E_3$  dans les directions d'orthotropie,
- 3 modules de cisaillement  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$ ,
- 3 coefficients de Poisson  $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ .

#### Valeurs des constantes élastiques de quelques matériaux métalliques usuels

Les matériaux polycristallins avec une répartition aléatoire des orientations cristallines des grains (pas de texture) ont un comportement élastique isotrope. Les constantes sont données à titre indicatif dans le tableau 2.

Matériau	$E$ (MPa)	$\nu$	$\mu$ (MPa)
Aluminium	68 000	0,33	26 000
Cuivre	110 000	0,35	46 000
Acier	200 000	0,3	83 000
Titane	115 000	0,34	45 000

Tableau 2 : Valeurs des constantes élastiques de métaux usuels.

### Critère de plasticité ou limite d'élasticité

Dans le cas d'un chargement complexe, on détermine quand s'effectue le passage du domaine des déformations élastiques aux déformations plastiques. Cette transition s'opère lorsque les valeurs du tenseur des contraintes vérifient une certaine condition. Lorsque cette condition (ou critère limite) est satisfaite, une partie des déformations du matériau devient irréversible. On montre sur quels principes fondamentaux est formulé le critère de plasticité au niveau phénoménologique.

#### Critère Von Mises

L'hypothèse des petites déformations élastiques est toujours valable. Pour ne pas surcharger les calculs, on suppose que le matériau ne subit pas de grandes rotations. Cette hypothèse autorise l'utilisation du tenseur des petites déformations élastiques. On présente ici la démarche qui conduit au critère de Von Mises<sup>3</sup>. Ce critère repose sur le postulat suivant : *l'état plastique est atteint si l'énergie élastique de cisaillement par unité de volume atteint une valeur critique  $Q$ .*

$$W_{ec} = Q. \quad (113)$$

L'énergie volumique locale élastique est :

$$W_e = \frac{1}{2} \text{tr}[\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}_e] = \frac{1}{2} \sigma_{(kj)} \varepsilon_{e(jk)}. \quad (114)$$

L'énergie volumique de cisaillement est obtenue avec les parties déviatoriques des tenseurs :

$$W_{ec} = \frac{1}{2} \text{tr}[\mathbf{s} \boldsymbol{\varepsilon}_D]. \quad (115)$$

On utilise la loi de comportement élastique (105) pour démontrer la relation suivante entre le tenseur déviateur des contraintes et le tenseur déviateur des déformations :

$$\boldsymbol{\sigma}_D = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_D. \quad (116)$$

En reportant cette relation dans l'équation (115), on obtient alors la valeur de l'énergie de cisaillement en un point du matériau en fonction du deuxième invariant du tenseur déviateur des contraintes :

$$W_{ec} = \frac{1}{4\mu} \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}_D] = \frac{1}{2\mu} \sigma_{DII}, \quad (117)$$

Le matériau se plastifie en trajet monotone si l'énergie élastique atteint la valeur critique  $Q$  :

$$\frac{\sigma_{DII}}{2\mu} = Q \Rightarrow \sigma_{DII} = K_I. \quad (118)$$

Le deuxième invariant du déviateur des contraintes est donc directement lié à l'énergie élastique stockée dans le matériau. La valeur  $K_I$  est introduite pour simplifier les notations. Le calcul du déviateur est effectué dans le cas de la traction et du cisaillement sur un matériau isotrope.

#### Application en traction

Dans le repère de la figure 5, une représentation du tenseur de traction est :

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (119)$$

Dans le cas de la traction, on montre que :

$$\sigma_{DII} = \frac{\sigma^2}{3}. \quad (120)$$

<sup>3</sup> Il existe d'autres indicateurs pour déterminer si le matériau entre dans le domaine de plastification. Par exemple, Tresca propose de suivre la valeur maximale de la contrainte de cisaillement pour l'état de contrainte considéré. Lorsque cette contrainte dépasse une valeur seuil, le matériau atteint sa limite élastique.

Cette première application montre que la plastification a lieu si l'invariant du déviateur vaut :

$$\sigma_{DII} = \frac{\sigma_e^2}{3}, \quad (121)$$

où  $\sigma_e$  désigne la limite apparente élastique du matériau en traction et fixe en principe la valeur limite de  $K_I$  liée à l'énergie de cisaillement stockée dans le matériau. Ceci conduit à définir une valeur généralisée représentative de l'énergie élastique de cisaillement qu'on appelle contrainte équivalente ou contrainte Von Mises :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3\sigma_{DII}} = \sqrt{\frac{3}{2}(s_{(ij)}s_{(ij)})}, \quad (122)$$

Cette grandeur est ainsi définie pour correspondre à la limite élastique de traction. Cette notion est fondamentale dans la modélisation traditionnelle du comportement plastique.

#### Application cisaillement

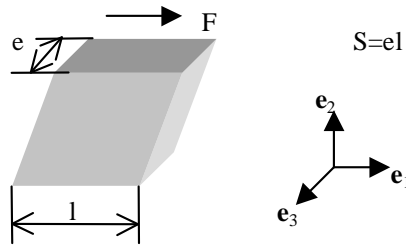


Figure 20 : Représentation du cisaillement.

La contrainte de cisaillement est  $\tau = \frac{F}{S}$  où  $S$  est la section cisailée et  $F$  le module de la force tangentielle exercée dans la section. Une représentation du tenseur de cisaillement dans les axes de la figure 20 est :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (123)$$

On montre que le deuxième invariant des contraintes est alors égal à

$$s_{II} = \tau^2, \quad (124)$$

On obtient alors une relation entre la limite élastique en traction et celle en cisaillement en utilisant les deux équations (120) et (124) :

$$\tau_e = \sqrt{K_I} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}, \quad (125)$$

#### Extension cas général

Dans un repère quelconque, l'expression du critère de Von Mises est :

$$\frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{21}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{32}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{31}^2)] - \frac{\sigma_e^2}{3} = 0 \quad (126)$$

#### Représentation des surfaces de plasticité

Lorsque tous les états limites de contrainte qui vérifient l'équation ci-dessus sont tracés dans l'espace des contraintes, on obtient une surface limite entre le domaine élastique et le domaine des déformations plastiques. Dans l'espace des contraintes principales à 3 dimensions le critère de Von Mises a pour équation :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_e. \quad (127)$$

C'est l'équation d'un cylindre d'axe la trisectrice du repère des contraintes principales et de rayon  $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_e$ . Ainsi le critère de Von Mises se représente de la façon suivante dans l'espace des contraintes principales.

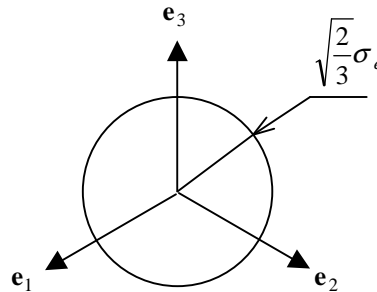


Figure 21 : Représentation du critère de Von Mises dans l'espace des contraintes principales.

### Ecrouissage

Lors d'un essai de traction, on constate que la limite unidimensionnelle entre le comportement élastique et le comportement plastique varie avec la déformation. Ainsi, une éprouvette après déchargement conserve un allongement permanent, mais présente une limite élastique à la recharge différente de la limite élastique relevée au début de l'essai comme l'illustre la figure 22. Cette courbe est décrite analytiquement par  $\sigma = g(\varepsilon)$ . La fonction  $g(\varepsilon)$  peut prendre une des formes proposées dans le tableau 1.

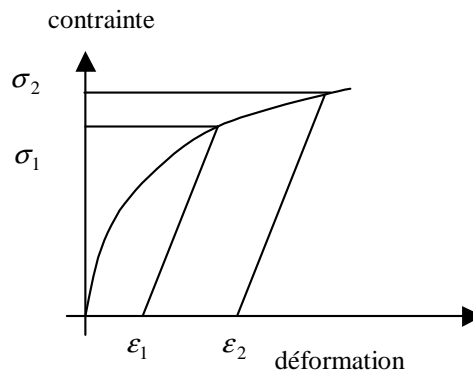


Figure 22 : Variation de la limite élastique à différents taux de déformation.

Pour un matériau ayant une histoire de déformation donnée, il faut généraliser la détermination de la limite d'élasticité. Pour les matériaux dits à comportement isotrope, on utilise par exemple la contrainte équivalente au sens de Von Mises pour déterminer l'énergie élastique stockée dans le matériau. L'histoire du matériau est "enregistrée" au moyen d'une grandeur appelée déformation équivalente qui fait office de variable interne.

### Déformation équivalente

Cette grandeur est définie à partir du tenseur des vitesses de déformation plastique. Ce qui revient, pour des raisons de simplification de la présentation, à adopter un formalisme incrémental dans la configuration isocline. Ceci permet de s'affranchir du calcul des rotations et de considérer que les incréments de déformations plastiques sur un pas restent petits et d'appliquer :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_p}{dt} . \quad (128)$$

Par définition, la vitesse de déformation plastique équivalente au point considéré et pour le tenseur vitesse de déformation est :

$$\dot{\varepsilon}_{eq} = \sqrt{\frac{4}{3} \dot{\varepsilon}_{pII}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}} , \quad (129)$$

où  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  avec  $i,j=1,2,3$  sont les composantes du tenseur des vitesses de déformation dans un repère donné.  $\dot{\varepsilon}_{pII}$  désigne le deuxième invariant de ce tenseur. La déformation plastique équivalente est quant à elle définie par :

$$\varepsilon_{eq} = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{eq} dt . \quad (130)$$

Dans le cas d'un essai de traction sur un matériau plastiquement isotrope, la représentation du tenseur de vitesse de déformation est donnée par<sup>4</sup> :

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_l & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{\varepsilon}_l}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{\varepsilon}_l}{2} \end{bmatrix} , \quad (131)$$

où  $\mathbf{e}_1$  est nécessairement colinéaire à la direction selon laquelle est effectuée la traction et  $\dot{\varepsilon}_l$  la vitesse de déformation longitudinale correspondante. Dans ce cas, on montre que la vitesse de déformation équivalente vaut :

$$\dot{\varepsilon}_{eq} = \dot{\varepsilon}_l . \quad (132)$$

Si l'éprouvette s'est allongée d'une longueur  $\Delta l$  sur le temps  $t$  par rapport à une longueur initiale  $L_0$ , l'intégration de la vitesse de déformation au cours du temps donne :

$$\varepsilon_{eq} = \ln(1 + \varepsilon_n) = \ln\left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right) . \quad (133)$$

La déformation équivalente correspond dans le cas d'un essai de traction à la mesure de la déformation longitudinale logarithmique.

#### *Limite élastique d'un matériau plastiquement écrouissable*

Les matériaux sont triés en fonction de leur comportement plastique. On présente trois modèles élémentaires typiques d'évolution de la limite élastique en fonction de la déformation plastique.

#### *Transition élasto-plastique d'un matériau isotrope*

Pour décrire l'écrouissage des métaux, on considère que la relation entre la contrainte équivalente et la déformation équivalente est identique à celle obtenue en traction entre contrainte vraie et déformation vraie. Les grandeurs équivalentes ont été initialement choisies pour correspondre dans le cas de la traction à la contrainte vraie et la déformation longitudinale vraie, ce qui ne pose donc pas de problème lors de l'application à un essai de traction. L'extension suppose que la relation reste vraie lorsqu'on calcule la contrainte équivalente avec un état de contrainte général et la déformation équivalente à partir des déformations correspondantes. La loi d'écrouissage tridimensionnelle dans le cas d'un matériau à comportement plastique isotrope est alors obtenue par :

$$f(\sigma_{eq}, \sigma_e) = \sigma_{eq} - \sigma_e(\varepsilon_{eq}) = 0 , \quad (134)$$

où  $\sigma_e(\varepsilon_{eq})$  est la contrainte d'écoulement en traction.

<sup>4</sup> Voir l'hypothèse d'incompressibilité plastique équation (142).

### Transition élastoplastique d'un matériau anisotrope

Le laminage de la tôle entraîne la déformation des grains. Les orientations de ces derniers convergent alors vers une orientation commune. On obtient alors un matériau qualifié de "texturé" parce que la distribution des orientations des grains n'est plus aléatoirement distribuée dans l'espace. Le comportement plastique du matériau devient sensible à l'orientation de l'éprouvette par rapport à la direction privilégiée de l'essai. Pour des éprouvettes de traction, on constate que l'orientation de l'éprouvette par rapport à la direction de laminage a une incidence schématisée sur la figure 23 :

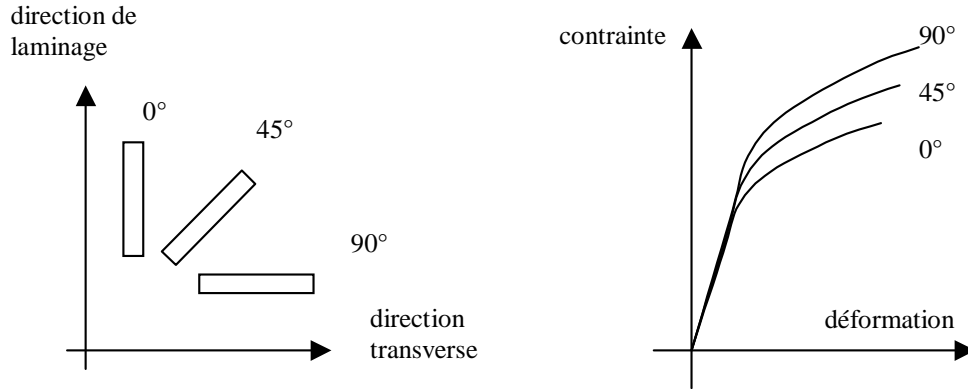


Figure 23 : Exemples de courbes contrainte déformation en traction sur le même matériau découpé selon différentes orientations par rapport à la direction de laminage de la tôle.

La contrainte équivalente est alors définie de façon plus générale en utilisant la contrainte de Hill [46]. La relation ci-dessous est exprimée par rapport aux axes de références associés à la tôle : direction de laminage, direction transverse et normale à la tôle.

$$\sigma_{eq} = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{22} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{12}^2, \quad (135)$$

où  $F, G, H, L, M$ , et  $N$  sont des constantes obtenues par des tests sur le matériau découpé avec différentes orientations selon les relations suivantes. Généralement, on choisit la courbe à  $0^\circ$  pour déterminer la relation contrainte équivalente déformation équivalente.

$$\begin{aligned} F &= \frac{\sigma_{el}^2}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{22el}^2} + \frac{1}{\sigma_{33el}^2} - \frac{1}{\sigma_{11el}^2} \right) \\ G &= \frac{\sigma_{el}^2}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{33el}^2} + \frac{1}{\sigma_{11el}^2} - \frac{1}{\sigma_{22el}^2} \right) \\ H &= \frac{\sigma_{el}^2}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{11el}^2} + \frac{1}{\sigma_{22el}^2} - \frac{1}{\sigma_{33el}^2} \right) \\ L &= \frac{3}{2} \left( \frac{\tau_{el}}{\sigma_{23el}} \right)^2, \quad M = \frac{3}{2} \left( \frac{\tau_{el}}{\sigma_{13el}} \right)^2, \quad N = \frac{3}{2} \left( \frac{\tau_{el}}{\sigma_{12el}} \right)^2, \end{aligned} \quad (136)$$

où  $\sigma_{ijel}$  est la contrainte limite mesurée quand  $\sigma_{ij}$  est appliquée comme la seule contrainte non-nulle.  $\sigma_{el}$  est la contrainte limite en traction et  $\tau_{el}$  est égale à  $\sigma_{el}/\sqrt{3}$ . Le critère quadratique de Hill s'écrit donc :

$$f(\sigma_{eq}) = \sigma_{eq} - \sigma_e(\epsilon_{eq}) = 0, \quad (137)$$

Cette description inclut le critère isotrope dans le cas où :  $F = G = H = \frac{1}{2}$  et  $L = M = N = \frac{3}{2}$ .

### Effet cinématique

Lorsqu'on fait un essai de compression, on pourrait s'attendre à avoir un niveau de recharge au même niveau que la contrainte atteinte lors du trajet en sens direct. En général, une tôle ne présente pas la même contrainte

élastique lorsqu'on fait suivre une traction d'une compression (figure 24). Cet effet est dû à l'existence de contraintes internes au matériau. Ces contraintes s'opposent à la progression de la déformation imposée. Par contre, lorsqu'on effectue un trajet en sens opposé, elles vont assister la contrainte appliquée (figure 25). Le matériau présente alors une limite élastique apparente de plasticité en compression inférieure à celle en traction.

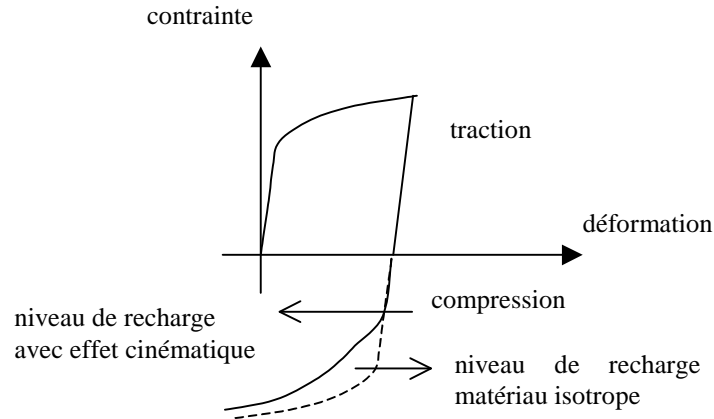


Figure 24 : Allure schématique de la contrainte dans une éprouvette en traction suivie d'une compression pour un matériau présentant un écrouissage cinématique.

Les contraintes internes responsables de ce changement de limite élastique en compression sont désignées dans la suite par contraintes cinématiques.

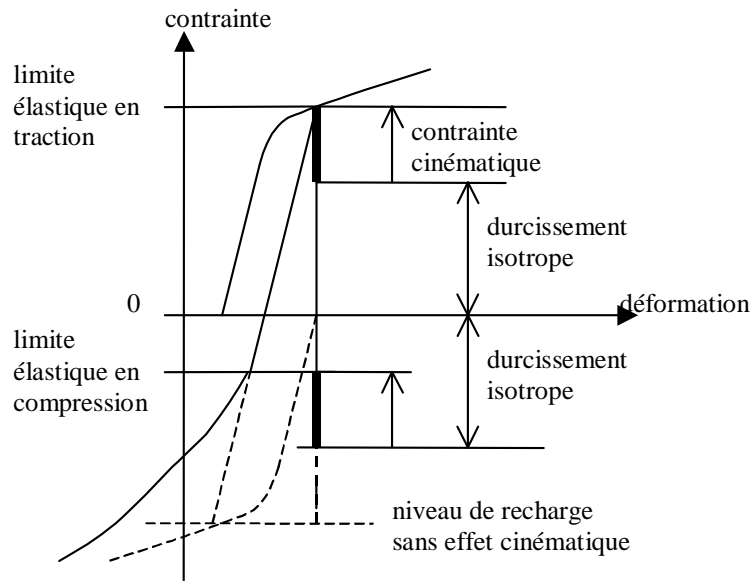


Figure 25 : Visualisation de la partition entre contrainte isotrope et contrainte cinématique.

L'évolution de la *contrainte cinématique* est représentée, le plus souvent, par un tenseur d'écrouissage cinématique  $\mathbf{X}_c$ . C'est un durcissement de type extrinsèque.

L'*écrouissage isotrope* restitue le gonflement de la surface de plasticité. C'est un durcissement de type intrinsèque. Les notions intrinsèque et extrinsèque sont plus facilement compréhensibles lorsqu'on s'intéresse à l'origine physique de la plasticité et sont approfondies dans la suite du rapport.

L'effet cinématique est obtenu dans la modélisation si on retranche le tenseur d'écrouissage cinématique  $\mathbf{X}_c$  du tenseur de contrainte au point  $M$  pour calculer la contrainte équivalente. On définit alors la forme quadratique suivante :

$$\sigma_{eq}^2 = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}_c) : \mathbf{M} : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}_c) , \quad (138)$$

avec  $\mathbf{M}$  un tenseur du quatrième ordre dont les composantes vérifient les propriétés suivantes :

$$M_{ijkl} = M_{jikl} = M_{klij} \text{ et } M_{iikm} = 0 , \quad (139)$$



Un jeu de valeurs appropriées donne le critère de Hill.

$$\begin{aligned} M_{1111} &= F + H & M_{2222} &= F + G & M_{3333} &= G + H \\ M_{1122} &= -F & M_{2233} &= -G & M_{3311} &= -H \\ M_{1212} &= L/2 & M_{2323} &= M/2 & M_{3131} &= N/2 \end{aligned} \quad (140)$$

Ce type de modélisation devient nécessaire lorsqu'on effectue la simulation d'emboutissage. Le pliage/dépliage subi au niveau du serre-flanc active l'effet cinématique dans le matériau et a des conséquences importantes sur le comportement ultérieur de la tôle.

### Loi d'écoulement plastique

La loi d'écoulement lie les évolutions du tenseur des contraintes aux évolutions du tenseur des déformations plastiques. Pour la présentation des concepts qui sous-tendent à l'établissement de la loi d'écoulement, on choisit de restreindre l'exposé au cas des matériaux isotropes.

Les relations qui décrivent l'écoulement plastique sont plus complexes que pour un comportement purement élastique. Dans le domaine des déformations purement élastiques, il existe une relation univoque entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations élastiques. La figure 26 illustre que la détermination d'une telle relation est impossible entre la déformation plastique et le tenseur des contraintes.

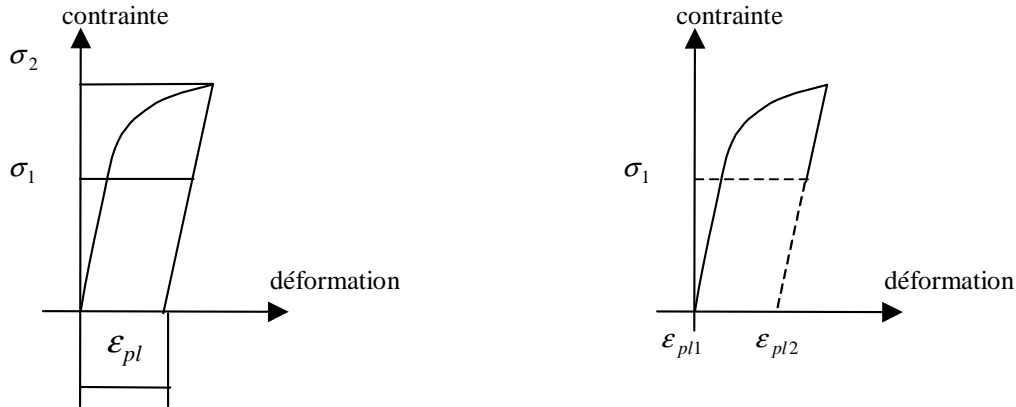


Figure 26 : Illustration de l'impossibilité de trouver une relation univoque entre contrainte et déformation plastique. Figure de gauche : même déformation plastique pour différentes contraintes appliquées. Figure de droite : même contrainte pour différentes déformations plastiques.

Pour être univoque la loi d'écoulement plastique doit donc être une relation entre l'incrément de déformation d'une part et la contrainte et son incrément d'autre part :

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = G(\boldsymbol{\sigma}, d\boldsymbol{\sigma}), \quad (141)$$

G est une forme analytique qui dépend dans le cas général des caractéristiques du matériau et de son histoire. Deux hypothèses sont nécessaires pour mieux spécifier la fonction G.

### Incompressibilité

La plasticité est un processus qui s'opère essentiellement par cisaillement dans les plans cristallins denses. Ceci entraîne une indépendance de la plasticité aux contraintes de type hydrostatique qui n'ont en principe aucun effet de cisaillement sur ces plans<sup>5</sup>. On considère le matériau comme plastiquement incompressible : le volume reste constant au cours de la déformation. La variation relative de volume due à la plasticité est nulle et par conséquent :

$$tr[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p] = 0, \quad (142)$$

<sup>5</sup> Cette règle n'est pas toujours applicable. Les matériaux à structure cubique centrée dérogent à cette règle. L'écoulement sur les plans dépend de la contrainte normale sur ceux-ci à basses températures.

### Principe du travail maximal

On admet (mais cela n'a jamais été démontré) que le matériau vérifie le principe du travail maximal. Au cours de la déformation plastique le travail volumique d'un état de contrainte à l'intérieur de la surface de charge  $\sigma_{eq} - g(\epsilon_{eq}) \leq 0$  est maximal par rapport à tout autre état de contrainte admissible. Cet énoncé est utilisé pour déduire d'une part la loi de normalité qui exprime l'incrément de déformation plastique sous la forme :

$$d\epsilon_p = d\lambda \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma} , \quad (143)$$

et d'autre part démontrer la propriété de convexité que doit vérifier la surface de charge. Le scalaire  $d\lambda$  suit les règles suivantes :

$$\begin{aligned} d\lambda &= 0 \quad \text{si} \quad f(\sigma_{eq}) < 0 \\ d\lambda &= 0 \quad \text{si} \quad f(\sigma_{eq}) = 0 \text{ et } df(\sigma_{eq}) \leq 0 \\ d\lambda &\geq 0 \quad \text{si} \quad f(\sigma_{eq}) = 0 \text{ et } df(\sigma_{eq}) > 0 \end{aligned}$$

L'application de la relation (143) dans le cas du critère de Hill donne :

$$d\epsilon_p = \frac{d\lambda}{\sigma_{eq}} \mathbf{b}_e \quad \text{avec} \quad (144)$$

$$\mathbf{b}_e = \begin{bmatrix} -G(\sigma_{33} - \sigma_{11}) + H(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \\ F(\sigma_{22} - \sigma_{33}) - H(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \\ -F(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + G(\sigma_{33} - \sigma_{11}) \\ 2N\sigma_{12} \\ 2M\sigma_{13} \\ 2L\sigma_{23} \end{bmatrix}$$

### Ecrouissage et loi de comportement plastique des matériaux anisotropes

Les derniers développements pour la modélisation phénoménologique de la plasticité ont conduit à l'élaboration de modèles plus en lien avec la physique. Le modèle de Téodosiu et Hu est justifié par le lien qu'ont les équations avec la physique. Il intègre l'influence d'une prédéformation sur la surface de plasticité et sur l'écrouissage ou l'adoucissement ultérieur. Ce modèle est présenté succinctement dans sa version pour l'aluminium. L'objectif est de formuler et d'identifier des lois de comportement pour une simulation performante des processus de mise en forme qui impliquent des grandes transformations et des changements de trajets de déformation.

La condition d'écoulement est :

$$\sigma_{eq} - Y = 0 . \quad (145)$$

La contrainte équivalente est définie par :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}_c) : \mathbf{M} : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}_c)} . \quad (146)$$

La loi d'écoulement plastique par :

$$\mathbf{D}^p = \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_{eq}} \mathbf{M} : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}_c) = \dot{\lambda} \mathbf{n} . \quad (147)$$

La fonction a une évolution contrôlée par :

$$Y = Y_0 + R + fS . \quad (148)$$

L'évolution des grandeurs  $R$  ,  $S$  et  $\mathbf{X}_c$  est donné par trois équations d'évolution :

$$\begin{aligned}
 \dot{R} &= C_R (R_{sat} - R) \dot{\lambda} \\
 \dot{S} &= C_s (S_{sat} - S) \dot{\lambda} \\
 \dot{\mathbf{X}}_c &= C_x (X_{sat} \mathbf{n} - \mathbf{X}_c) \dot{\lambda}
 \end{aligned}
 \tag{149}$$

Ce modèle fait donc appel à 8 paramètres matériaux :  $Y_0$ ,  $C_R$ ,  $R_{sat}$ ,  $f$ ,  $C_x$ ,  $X_{sat}$ ,  $C_s$  et  $C_{sat}$ . L'identification se fait en utilisant une batterie de tests mécaniques : tests de cisaillement, test Bauschinger sur différentes éprouvettes prédéformées. Cette modélisation (également définie pour d'autres matériaux) est une des plus abouties des modélisations phénoménologiques du comportement plastique à froid des matériaux métalliques. Elle n'est pas encore disponible dans les modèles généraux proposés dans les codes commerciaux de simulation du comportement des matériaux.

### Conclusion

Dans cette partie, on effectue les différents rappels relatifs à l'étude classique de la plasticité. L'accent est mis sur le comportement des matériaux métalliques ductiles généralement utilisés dans le cadre de l'emboutissage. Pour rester pragmatique et avoir un point de vue déjà orienté sur la physique de la déformation plastique, on a laissé de côté les aspects liés à la thermodynamique qui apportent des justifications fondamentales aux principes proposés. Ces rappels mettent en évidence les hypothèses et la genèse des modèles de plasticité courants.

Le constat est que la modélisation du comportement plastique est effectuée de façon analytique en essayant de suivre au mieux les évolutions de la surface de plasticité détectées avec des essais mécaniques. Ce type de modélisation repose initialement sur l'hypothèse du travail plastique maximal et nécessite la détermination d'une courbe contrainte équivalente—déformation équivalente en traction. L'aspect critique est que ces lois doivent être utilisées pour décrire le comportement à de très grands taux de déformation voire lors de la localisation alors que la détermination de la courbe est obtenue le plus souvent à partir d'essais mécaniques à champs de déformations homogènes ou supposés comme tels.

Ce point important, est insuffisamment étudié de mon point de vue, pour justifier de l'étude de la fiabilité de cette modélisation sur des cas plus ou moins complexes. La première partie propose donc une étude fine des essais de traction et de d'expansion modélisés ensuite traditionnellement. L'apport de l'étude permet ensuite d'envisager la simulation plus sophistiquée d'opérations élémentaires d'emboutissage.

On a recours à des logiciels de simulations éléments finis à différentes occasions pour traiter les problèmes. La présentation des principes inhérents à ces grands codes peut être trouvée par exemple dans [48].

## PARTIE 2 Etude phénoménologique de la plasticité des métaux

L'objectif général de ce chapitre est de mesurer les atouts et les inconvénients de la modélisation classique (phénoménologique) de la plasticité.

Actuellement de nombreux outils numériques sont disponibles pour traiter la simulation d'opérations d'emboutissage (Abaqus, Marc, Palm, Optris...). L'emboutisseur dispose également d'une palette de critères pour traiter la localisation, le plissement. Avec cet arsenal, on est capable, en théorie de prédire jusqu'au retour élastique du produit fini.

Il en va a priori tout autrement si on se réfère au "benchmark" pratiqué par exemple au congrès de Besançon Numisheet'99 (figures 27 et 28).

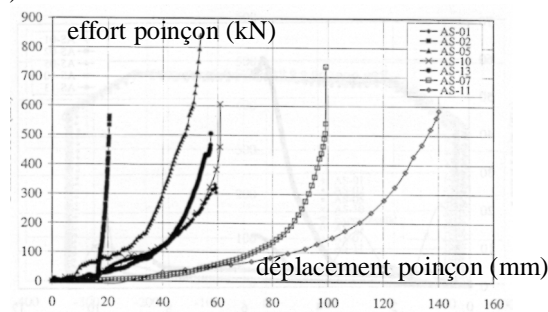


Figure 27 : Effort poinçon en fonction du déplacement. Comparaison de différentes simulations pratiquées par différents opérateurs avec différents outils numériques pour une même opération d'emboutissage sur une portière de voiture [14].

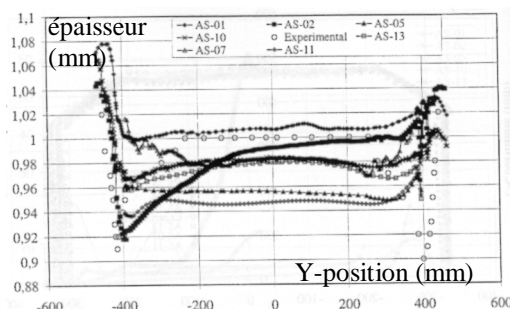


Figure 28 : Distribution des épaisseurs le long d'une section donnée. Comparaison de différentes simulations pratiquées par différents opérateurs avec différents outils numériques pour une même opération d'emboutissage sur une portière de voiture [14].

Les simulations pratiquées sont réalisées par des experts. La grande dispersion des résultats constatée sur les figures 27 et 28 met cependant en évidence une faiblesse dans la cuirasse.

La complexité de la mise en œuvre d'une simulation de type éléments finis pour l'emboutissage, le coût élevé des logiciels et l'incertitude encore attachée aux résultats expliquent sans doute le faible taux de confiance accordé par les emboutisseurs professionnels aux outils numériques de simulation. A titre d'exemple, non loin d'Annecy les Sociétés TEFAL, REBOUL, la Société d'Emboutissage Précis préfèrent ne pas investir dans ce secteur de recherche. De surcroît, leurs régleurs (que l'on peut qualifier d'experts) sont souvent plus performants dans l'analyse de l'opération (surtout lorsque celle-ci appartient à une gamme à plusieurs opérations) que n'importe quel système éléments finis. Même si leur connaissance de la plasticité est rudimentaire, leur modélisation "interne" du matériau est, quant à elle, excellente...

Cette analyse montre qu'on est en droit de soulever des questions quant à la prise en compte de la modélisation plastique dans la simulation. Il apparaît évident que les chercheurs se doivent d'améliorer la qualité de simulation pour convaincre les industriels que la prédiction de faisabilité de gamme est envisageable à partir de codes industriels.

Pour évaluer et éventuellement améliorer les modélisations standards, la procédure suivante est adoptée.

Afin de mieux appréhender les mécanismes et les points clés inhérents à ce type de modélisation, on regarde en détail l'application d'une modélisation plastique phénoménologique pour traiter des cas "simples" : la traction et l'expansion. Une opération d'emboutissage combine en effet au moins ces deux modes de déformation. La connaissance fine de ces essais élémentaires est utilisée pour mieux comprendre et mieux simuler une opération globale. Afin de déterminer au mieux les lois locales de plasticité qui reposent sur la détermination de la courbe

contrainte déformation en traction, on utilise un outil de détermination automatique des déformations surfaciques. Cet outil est présenté et les avantages qu'il procure sont mis en évidence. L'analyse des deux modes de déformations avec l'aide de cet outil fait ressortir deux points originaux pour améliorer instantanément et sans complication la modélisation du comportement plastique et sa simulation. La mise en œuvre de ces prescriptions s'effectue d'ailleurs sans problème pour simuler une opération simple d'emboutissage.

Le plan de ce chapitre est le suivant :

L'outil de mesure de déformation est présenté.

Les résultats expérimentaux de l'essai de traction sont analysés et ils sont confrontés aux résultats d'une simulation numérique.

L'expansion est analysée expérimentalement et numériquement.

Les résultats probants de différentes simulations d'opérations d'emboutissage montrent la pertinence de l'analyse mais des éléments supplémentaires justifient le traitement particulier de la plasticité proposé dans le chapitre suivant.

### Présentation de l'outil de détermination des déformations surfaciques

Cet outil informatique utilisant une chaîne d'acquisition complètement numérique a été développé et étudié au laboratoire par Vacher [92]. Il est largement utilisé dans les parties suivantes. Comme le domaine de l'analyse d'images est relativement peu connu des mécaniciens et en raison du caractère novateur de la méthode, on donne ici les principes fondamentaux de mise en œuvre. L'intérêt principal de cet outil est qu'il fournit à tout moment une cartographie des déformations au cours d'un essai mécanique. Un autre avantage réside dans la simplicité d'utilisation. On montre, figure 29, un exemple d'informations fournies par le logiciel matérialisé par une cartographie des déformations longitudinales de la surface d'une éprouvette plane lors d'un essai de traction.

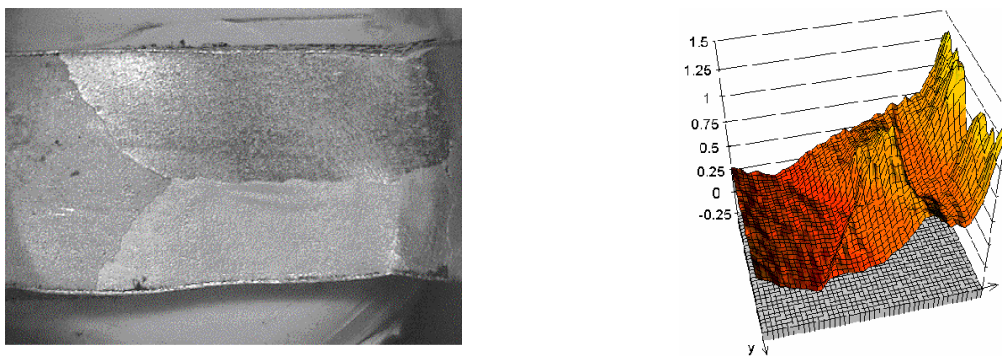


Figure 29 : Exemple de cartographie fournie par le logiciel de détermination des déformations (déformation longitudinale d'un tri-cristal d'aluminium en traction large).

### Chaîne d'acquisition

L'éprouvette est peinte avec un mélange de peintures noire et blanche de façon à obtenir des motifs aléatoires avec différents niveaux de gris dont la distribution est aussi large que possible.

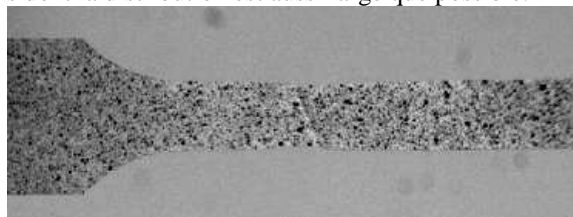


Figure 30 : Exemple d'éprouvette préparée pour un suivi des déformations avec le système d'analyse automatique des déformations.

L'acquisition de l'image de la surface peinte de l'éprouvette est réalisée au moyen d'une caméra numérique à capteur CCD à niveau de gris. Les trois lettres CCD sont utilisées pour Charge Coupled Device, ce qui signifie dispositif à transfert de charges. Le capteur CCD, comme le film photographique, se compose de grains appelés "pixels" qui sont des cellules sensibles à la lumière. La comparaison doit s'arrêter là car contrairement aux films, les éléments sensibles des capteurs CCD sont, en raison des limites technologiques actuelles, beaucoup moins nombreux. De forme carrée ou rectangulaire, ils sont disposés en matrice. Pendant l'exposition, la couche supérieure de chaque pixel va transformer les photons de la lumière en électrons. Cet électron, de charge

négative, est capturé par un champ électrique appliqué entre deux couches de silicium situées sous le pixel. A la fin de l'exposition chaque pixel a accumulé un nombre de charges électriques proportionnel à la quantité de lumière qu'il a reçu. A chaque acquisition, après un temps d'intégration, les tensions sont alors converties en valeur binaire selon un protocole lié au type de capteur. On obtient ainsi une image stockée sous forme d'une suite d'octets pour une image à 256 niveaux de gris. La valeur binaire de chaque octet correspond au niveau de gris enregistré par la caméra. Les nombres sont rassemblés dans un fichier informatique. La position d'un octet dans le fichier correspond à celle du pixel dans la matrice du capteur.

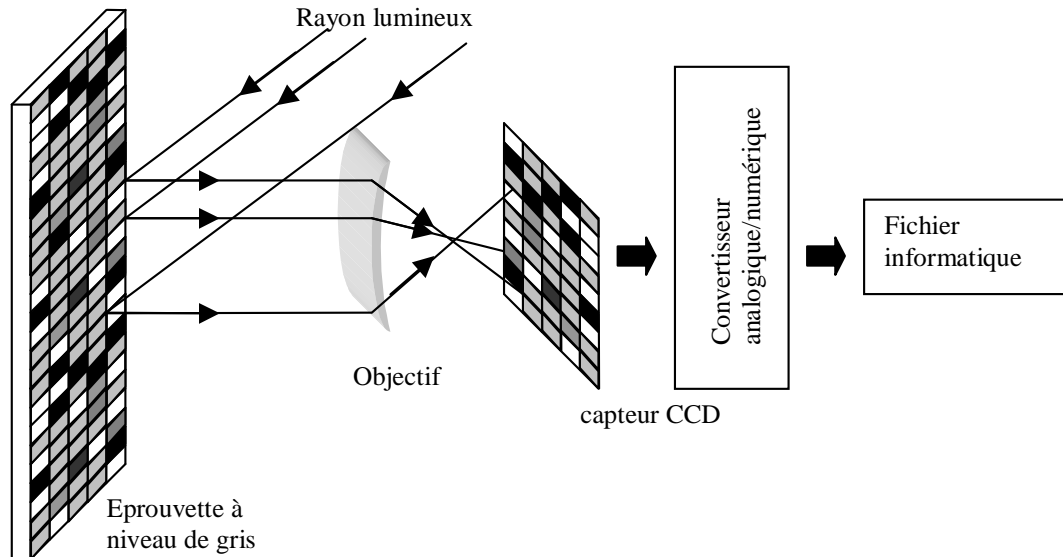


Figure 31 : Chaîne d'acquisition de l'image d'une zone de l'éprouvette peinte avec différents niveaux de gris.

### Traitement de l'image

On réalise plusieurs clichés de la même surface de l'éprouvette au cours de la déformation. Il s'agit maintenant d'obtenir le champ de déplacement qui permet de passer d'une image à l'autre<sup>6</sup>. On applique une grille virtuelle sur l'image non-déformée, d'un pas multiple de la taille d'un pixel. Cette taille est choisie par l'utilisateur. Pour chaque carreau de la grille initiale définie par ses 4 sommets, on doit rechercher la nouvelle position des 4 sommets dans l'image déformée (figure 32). La position d'un sommet dans l'image déformée est obtenue lorsqu'on retrouve le motif environnant le sommet dans l'image initiale. Ce motif, toujours rectangulaire, est composé d'un nombre déterminé de pixels : 4x4, 4x8... Le nombre de pixels composant le motif est choisi en fonction de certaines caractéristiques de l'image (distribution des niveaux de gris par exemple).

<sup>6</sup> ou de l'image initiale à une image quelconque.

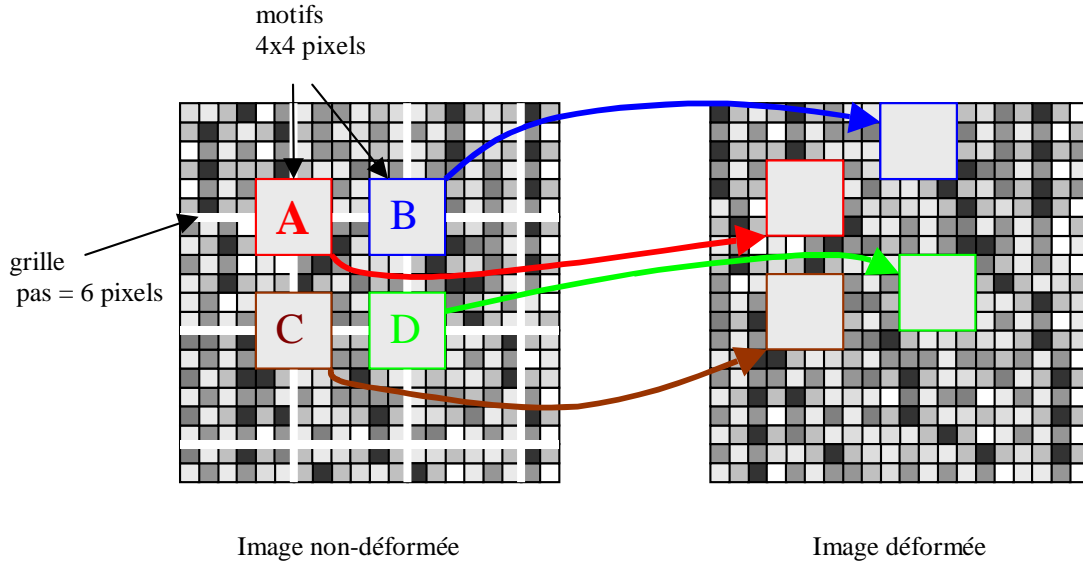


Figure 32 : Recherche des déplacements des nœuds d'une grille placée virtuellement sur l'image non-déformée.

La recherche de la nouvelle position du motif s'effectue en déplaçant de proche en proche le motif de l'image initiale dans l'image déformée. Pour chaque position du motif, on calcule le facteur de corrélation  $F_c$  :

$$F_c = 1 - \frac{\int_S f(x, y) f^*(x^*, y^*) dx dy}{\sqrt{\int_S f^2(x, y) dx dy \int_S f^{*2}(x^*, y^*) dx dy}}, \quad (150)$$

$f$  et  $f^*$  sont respectivement les fonctions qui décrivent les niveaux de gris de l'image initiale et de l'image finale.  $S$  est la surface du motif initial.  $(x, y)$  sont les coordonnées dans l'image initiale,  $(x^*, y^*)$  sont relatives à l'image finale. Le facteur de corrélation vaut 0 quand les deux images sont identiques. La position retenue pour le motif est celle qui correspond au minimum du facteur de corrélation.

Deux techniques additionnelles viennent améliorer l'efficacité de la méthode.

- Les niveaux de gris de l'image déformée sont interpolés de façon à pouvoir obtenir des déplacements inférieurs à la taille d'un pixel.
- La recherche du minimum du facteur de corrélation est accélérée par l'utilisation d'un algorithme fondé sur la méthode de Newton-Raphson.

Lorsque le centre des quatre motifs A, B, C et D (figure 32) est retrouvé sur l'image déformée, on calcule la déformation à appliquer aux motifs initiaux pour améliorer le facteur de corrélation. On recherche avec les motifs déformés, la nouvelle position  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  et  $D_1$  des centres sur l'image déformée (figure 33).

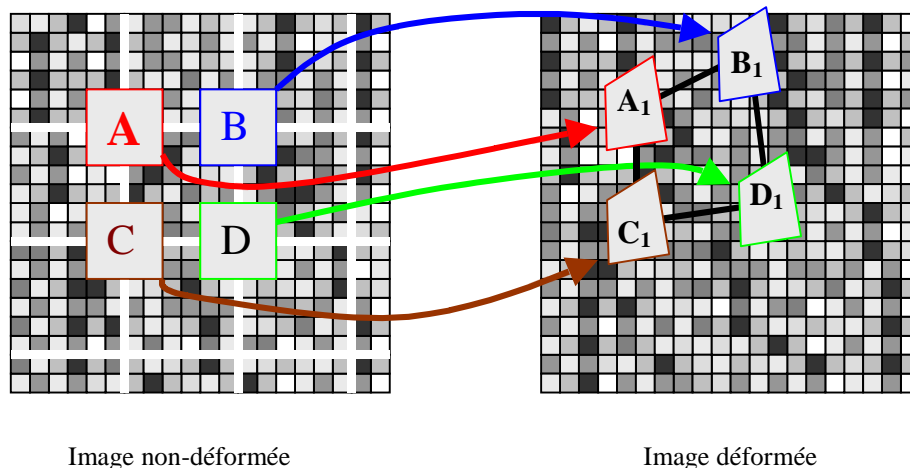


Figure 33 : Application de la déformation aux motifs pour améliorer la corrélation.

On répète cette dernière étape jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'évolution des positions des centres. Comme la procédure totale doit être appliquée à chacun des carreaux composant la grille déposée virtuellement sur l'image initiale, deux dispositions contribuent à augmenter la vitesse de traitement et la fiabilité de la méthode.

- Le premier point de correspondance entre un motif de l'image de départ et l'image déformée est nécessairement fourni par l'utilisateur.
- Lorsqu'on traite un nouveau carré de la grille, on applique d'entrée de jeu la déformation déjà calculée sur le carreau voisin.

Sur des images avec une distribution idéale des niveaux de gris, des déplacements de l'ordre du  $1/100^{\text{ème}}$  de pixel sont détectés. L'étendue de mesure couvre en principe un intervalle de 0,5% à 300%. Cette étendue se dégrade lorsque la qualité des images n'est plus optimale.

Cet outil permet de déterminer sans contact une cartographie des déformations et consécutivement un champ de déformation surfacique. Il est utilisé fréquemment au cours des études présentées dans le rapport.

### Analyse de l'essai de traction

La détermination des courbes contrainte équivalente-déformation équivalente revêt une importance toute particulière dans la modélisation du comportement plastique. En particulier, lorsqu'on vise la reproduction du phénomène de localisation de la déformation, la courbe doit être définie avec autant de précision que possible. Lorsque les déformations localisent, il devient difficile d'identifier le comportement local du matériau. En effet, la distribution des contraintes devient complètement hétérogène dans le volume utile de l'éprouvette. Si on détermine la contrainte en un point en divisant la force par la section, seule une contrainte moyenne, insatisfaisante pour le degré de précision recherchée, est obtenue. Comme la relation entre contrainte et déformation est incertaine, la modélisation du comportement lors de la localisation est fortement conditionnée par l'interprétation de l'expérience. Plusieurs chercheurs, selon leur sensibilité, ont proposé différents critères pour déterminer si le matériau est en condition de localisation (voir par exemple la revue proposée dans [42]) : Considère, Cordebois, Swift, Arrieux, Molinari, Brunet. Sans considérer la qualité relative de ces modèles, on constate qu'il n'existe pas de point commun entre ces différentes propositions. Il n'y a pas à l'heure actuelle de vision unifiée du phénomène. En fonction de l'angle sous lequel on aborde le problème, plusieurs questions demeurent :

- Quelle est "la" loi de comportement aux déformations qui conduisent à la localisation ?
- Existe-t-il un changement de régime dans le comportement lors de la localisation ?
- La striction correspond-elle à un état intrinsèque du matériau ?
- La striction résulte-t-elle simplement de la configuration d'essai ?
- Jusqu'où un code éléments finis est-il capable de rendre compte d'un essai de traction sans introduire de critère de localisation ?

Pour tenter de répondre à ces questions fondamentales, on propose d'analyser l'essai de traction avec l'outil d'analyse automatique des déformations. Pour mesurer l'apport de cet outil, une mesure classique avec extensomètre est également effectuée en parallèle. Une série d'images de la surface de l'éprouvette est enregistrée au cours de la déformation. Un premier type d'analyse est pratiqué pour lequel on détermine la courbe contrainte-déformation en extrayant une mesure de déformation entre chaque image et l'image initiale. Cette analyse, qui reproduit le fonctionnement de l'extensomètre classique met déjà en évidence les avantages de l'outil numérique sur l'extensométrie classique. D'une part, il est possible d'obtenir une courbe contrainte-déformation mieux définie qu'avec l'extensomètre, d'autre part les distributions des déformations à la surface de l'éprouvette sont



accessibles. Ceci conduit à pratiquer un second type d'analyse en déterminant la courbe contrainte déformation simultanément sur différentes zones de l'éprouvette. La dernière partie porte sur la validation des courbes contrainte-déformation déterminée et des concepts dégagés au cours de l'étude en utilisant des simulations éléments finis.

### Première technique d'analyse

#### *Aspects expérimentaux*

On détaille ici plus particulièrement une analyse pratiquée sur une éprouvette de cuivre dont la géométrie est détaillée sur la figure 34.

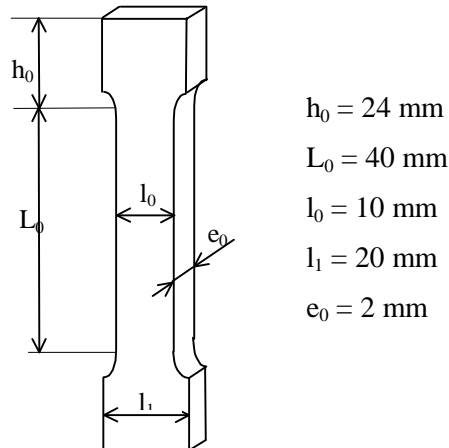


Figure 34 : Géométrie de l'éprouvette de traction utilisée pour l'analyse comparative des mesures de déformation par extensométrie classique et technique d'analyse d'images.

L'essai est réalisé sur la machine Instron présentée figure 3. La vitesse de la traverse est contrôlée pour assurer une vitesse de déformation initiale moyenne de  $2.10^{-4} \text{ s}^{-1}$  dans la zone utile de l'échantillon. La cellule de force enregistre les efforts avec une précision de 0,5%. L'extensomètre enregistre les déplacements avec une précision de 0,15%. Une face de l'échantillon est peinte de façon à pouvoir pratiquer l'analyse d'images. Des mors auto-serrants sont utilisés pour appliquer le chargement à l'échantillon. Durant l'essai, une vingtaine d'images est enregistrée par la caméra CCD 1024x1024 pixels.

#### *Mesure avec l'extensomètre*

Les paramètres  $F$  de la cellule de force et  $\Delta L$  l'allongement de l'extensomètre sont utilisés pour déterminer la courbe contrainte vraie- déformation vraie reportée figure 35.

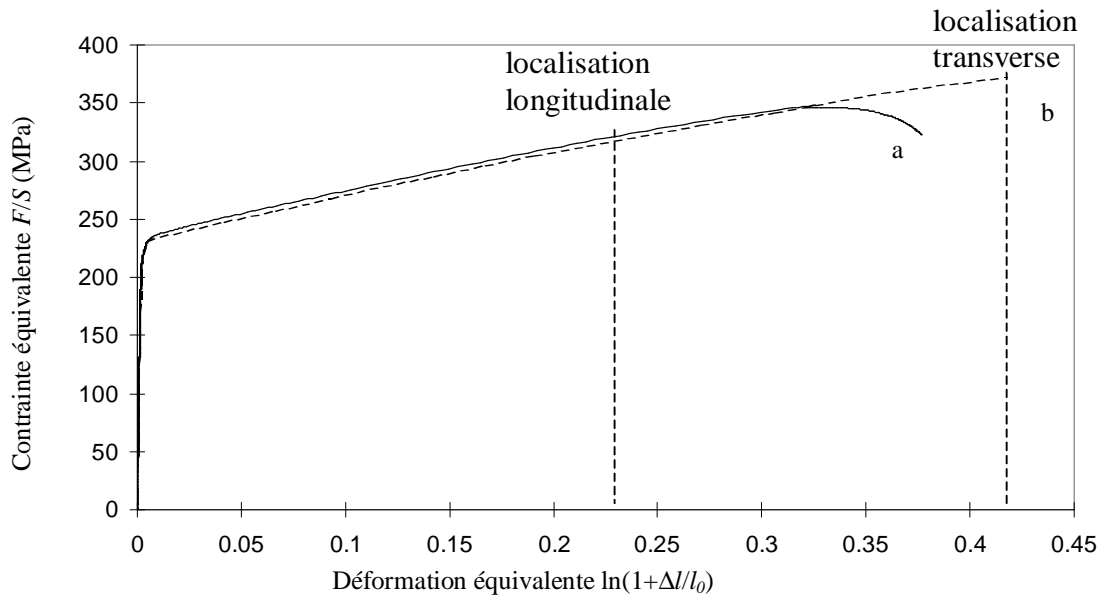


Figure 35 : Courbe contrainte équivalente – déformation équivalente a) à partir d'un déplacement enregistré par extensomètre b) à partir des mesures réalisées par le logiciel d'analyse automatique.

#### Mesure de déformation avec l'analyse automatique d'images

On enregistre une série d'images au cours de l'essai. Elles sont ensuite dépouillées informatiquement pour donner une succession de cartographies de déformation longitudinale figure 36.

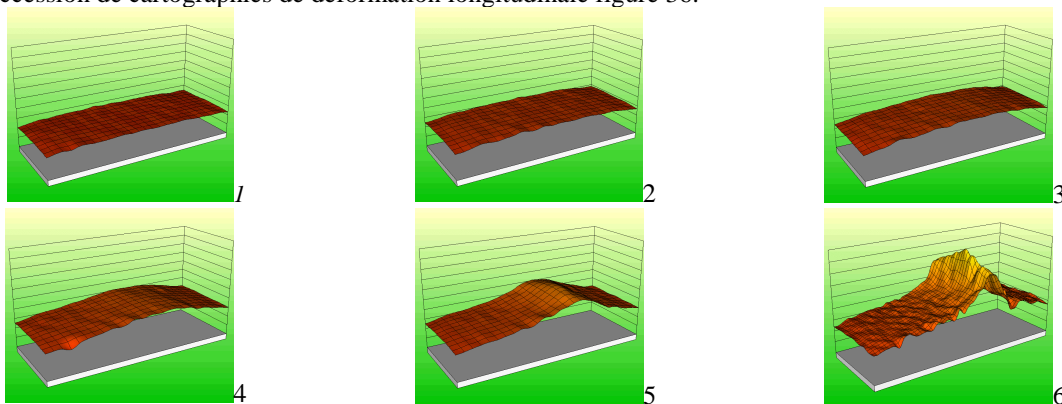


Figure 36 : 6 cartographies des déformations correspondant à différentes valeurs croissantes d'effort appliqué sur l'éprouvette de cuivre. Une graduation correspond à 0,05 de déformation longitudinale.

On s'aperçoit alors que la déformation est rapidement hétérogène dans le sens de la longueur. Pour une force appliquée à l'éprouvette, il correspond donc plusieurs valeurs de déformation. On souhaite reproduire le même type de traitement de l'essai que lorsqu'on utilise un extensomètre. Il faut alors extraire une seule mesure de déformation pour chaque cartographie. On utilise pour cela la déformation maximale des déformations longitudinales comme valeur représentative. Au même endroit, sur la cartographie des déformations transverses, on enregistre la valeur de déformation. Lorsqu'on utilise l'hypothèse de la conservation du volume, la déformation dans l'épaisseur est déduite de ces deux premières mesures. De ces déformations, on déduit la valeur courante de l'épaisseur et de la largeur. La contrainte vraie est alors calculée en faisant le rapport de la force appliquée sur l'échantillon au moment de la prise de vue sur la section courante  $le$ . Dans le cas où la contrainte est constante dans la section, elle est déterminée par :

$$\sigma = \frac{F}{le}, \quad (151)$$

Les résultats correspondant aux différentes images sont reportés sur la figure 35. Les différentes cartographies de déformations (figure 36) montrent une hétérogénéité croissante dans le sens longitudinal lorsque la déformation augmente. Cet effet est particulièrement visible à partir de la déformation 0,25. Cette valeur correspond à la déformation critique qui entraîne la localisation de la déformation lorsqu'on applique le critère de Considère. Cette valeur se retrouve sur la cartographie de déformation. Elle correspond au point d'inflexion sur le profil des déformations longitudinales. A partir de cette déformation, les mesures de l'extensomètre portent sur une trop grande longueur. La base de mesure pour calculer la déformation est alors trop importante relativement au gradient de déformation pour espérer obtenir une mesure locale représentative de la déformation. La mesure issue de l'analyse d'image est, quant à elle, toujours valable. Lorsque la déformation s'accroît, une localisation transverse se manifeste figure 37, et il ne devient plus possible de calculer valablement une valeur de la contrainte même à partir de l'analyse d'images.

Deux aspects importants sont déduits de cette analyse.

- La courbe d'érouissage obtenue par analyse d'image est valable même après la localisation de la déformation longitudinale.
- Après la localisation, le matériau continue à s'érouir avec la même pente qu'avant la localisation. Il n'y a pas pour ce matériau d'adoucissement.

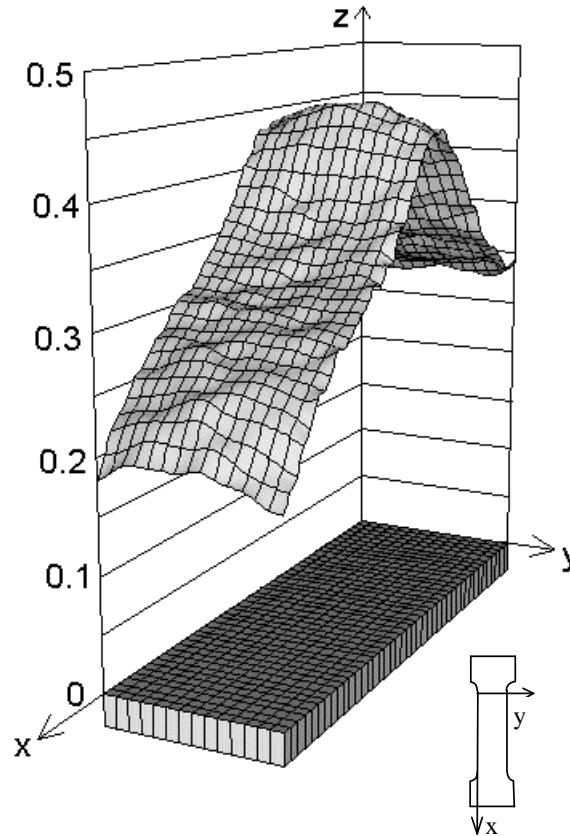


Figure 37 : Cartographie expérimentale des déformations longitudinales dans le cas d'une éprouvette d'aluminium en traction. Localisations longitudinale et transverse de la déformation.

#### Conclusion partielle

A l'issue de ce comparatif, l'outil d'analyse d'images apparaît plus performant. Le traitement des données fournit une courbe reproduisant celle de l'extensomètre dans l'intervalle des déformations homogènes et la prolonge tant que les déformations ne localisent pas transversalement. De plus, la cartographie des déformations met en évidence la distribution des déformations dans l'échantillon dès le début de l'essai. Même si cette hétérogénéité ne remet pas en cause le mode de calcul de la déformation avec l'extensomètre, l'essai de traction semble de ce point de vue nettement moins idéal que dans les manuels. A partir de ces considérations, on décide d'exploiter de

façon plus exhaustive les informations sur une image correspondant à un niveau de force, en déterminant simultanément plusieurs points de la courbe d'écrouissage.

### Seconde technique d'analyse

Cette procédure a été appliquée à la traction d'une éprouvette d'acier type Soldur utilisé couramment pour les opérations d'emboutissage. On suit simultanément sur les cartographies de déformation, trois points caractéristiques localisés par la figure 38. Ce travail revient à placer trois extensomètres classiques sur l'éprouvette et à comparer leurs informations.

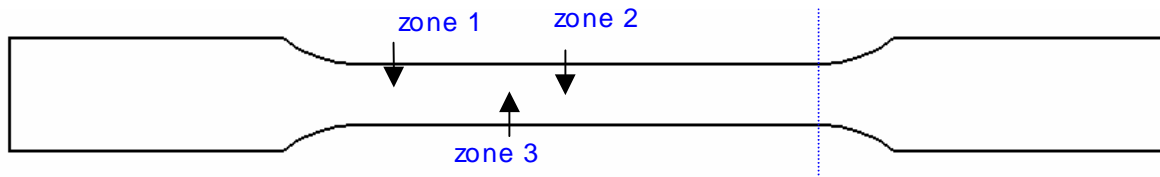


Figure 38 : Position des zones où sont relevées les déformations avec le logiciel d'analyse d'image.

Les couples (contrainte vraie - déformation vraie) sont obtenus selon la méthode proposée ci-dessus mais appliquée avec les déformations relevées en chacun des points et non plus exclusivement au centre. Le comportement de la matière en ces trois points est identique. Les 3 courbes d'écrouissage sont superposées sur la figure 39. Un phénomène moins attendu, mais a posteriori facilement explicable est la décharge qui apparaît lorsque la déformation se localise. Les zones concernées ne se déforment plus du tout lors de la suite de l'essai.

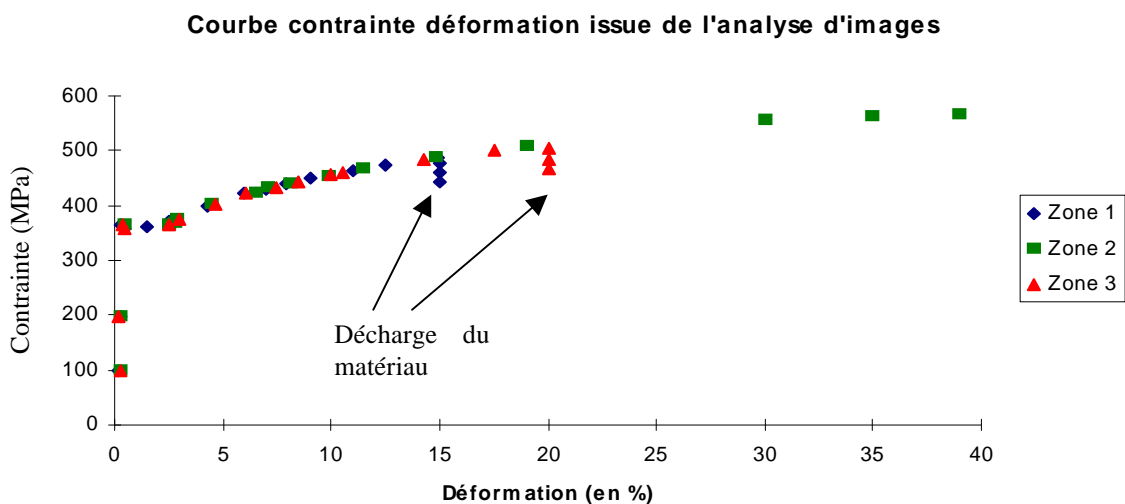


Figure 39 : Différence entre les courbes  $(\sigma_{eq}, \epsilon_{eq})$  en fonction de la position de l'extensomètre.

Dans la zone où la déformation se localise, on constate que l'écrouissage est toujours positif même lors de la localisation de la déformation. Cette localisation apparaît très tôt.

### Analyse avec la méthode des éléments finis.

Pour confirmer ces résultats, les courbes de référence  $(\sigma_{eq}, \epsilon_{eq})$  soigneusement déterminées dans les zones les plus déformées des deux éprouvettes utilisées pour les deux précédentes techniques ont été utilisées comme données d'entrée d'un code éléments finis (alternativement Ansys ou Abaqus) pour simuler l'essai de traction. Chaque éprouvette est maillée en respectant sa géométrie initiale et en utilisant éventuellement les symétries. La figure 40 correspond à l'éprouvette en acier utilisée pour la deuxième analyse.

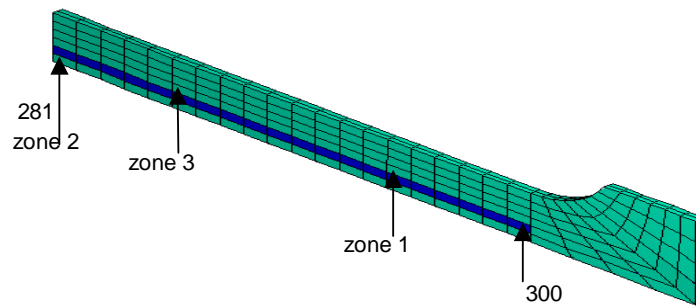


Figure 40 : Exemple de maillage d'un 1/4 d'éprouvette de traction, les numéros repèrent des éléments utilisés dans les figures suivantes. Les zones de mesure de déformations expérimentales ont été reportées en référence à la figure 38.

La comparaison porte sur plusieurs points :

- distributions des déformations
- courbe force-déplacement
- décharges dans l'éprouvette

Le code éléments finis réalise une intégration dans le temps et l'espace qui ne peut être correcte qu'à la condition sine qua non que le comportement local soit le bon. On considère que cette manipulation est donc a priori un bon test de validité de la courbe d'écrouissage utilisée. Le modèle de comportement plastique choisi est un comportement isotrope.

#### *Distribution des déformations*

La cartographie des déformations simulée sous Ansys, correspondant à la première analyse sur l'éprouvette de cuivre est présentée figure 41. Il faut comparer ce résultat numérique à la cartographie expérimentale proposée figure 37. A très fort taux de déformation, le modèle "simplifié" de plasticité isotrope quand on utilise une courbe de référence contrainte déformation correcte génère une distribution de déformation comparable point par point à la distribution originale.

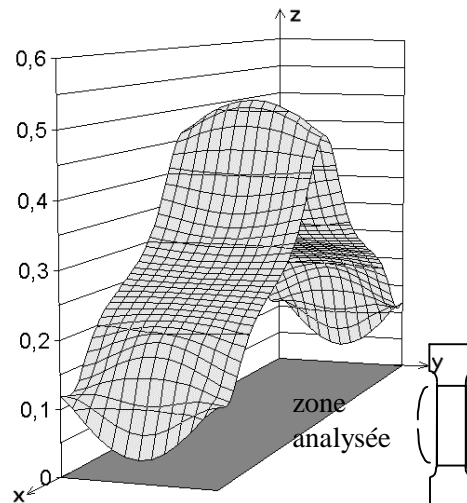


Figure 41 : Cartographie simulée des déformations longitudinales dans le cas d'une éprouvette d'aluminium en traction (voir figure 37 pour la cartographie expérimentale de référence).

#### *Détermination de plusieurs courbes force déplacement en parallèle*

Cette analyse est pratiquée à la suite de la précédente sous les mêmes conditions. La courbe simulée résulte de l'intégration du comportement du matériau sur l'ensemble du matériau. Pour obtenir la force en bout d'éprouvette, on effectue une sommation des efforts nodaux dans le sens de la traction. Le déplacement est celui imposé sur ces mêmes nœuds. La courbe simulée et la courbe expérimentale sont présentées sur la figure 42. La très bonne superposition des deux courbes valide la courbe de référence utilisée pour définir l'écrouissage du matériau.

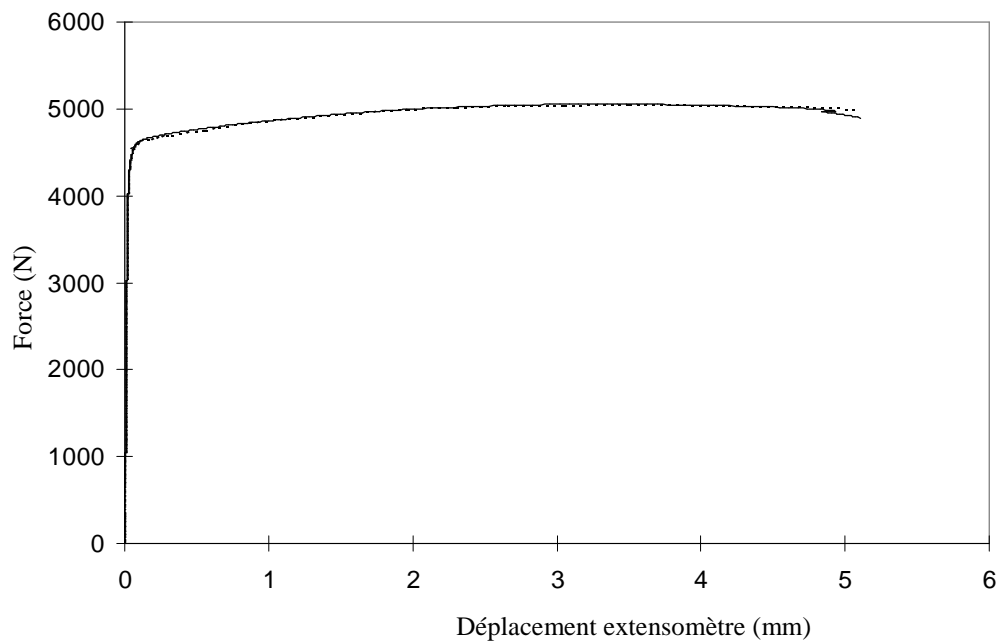


Figure 42 : Comparaison courbes force –déplacement simulée et expérimentale dans le cas de l'éprouvette de cuivre du paragraphe 0. La courbe simulée est en trait pointillé ; la courbe expérimentale est en trait continu.

#### *Zones de décharges dans l'éprouvette*

Cette simulation concerne l'éprouvette en acier Soldur utilisée pour l'application de la deuxième technique. Un quart de l'éprouvette est maillé comme le montre la figure 40. Pour chaque élément le long de la ligne centrale de l'éprouvette, on trace la courbe contrainte déformation (figure 43). Ce qui revient à utiliser autant d'extensomètres en parallèle le long de l'éprouvette. On constate que plus la déformation progresse, plus il y a d'éléments qui se déchargent. La décharge de l'éprouvette progresse des mors vers le centre de l'éprouvette. Les éléments centraux sont ceux dans lesquels la localisation se produit et qui se déforme le plus. La simulation est arrêtée lorsque la déformation atteinte n'est plus vraisemblable car aucun critère de rupture n'est introduit.

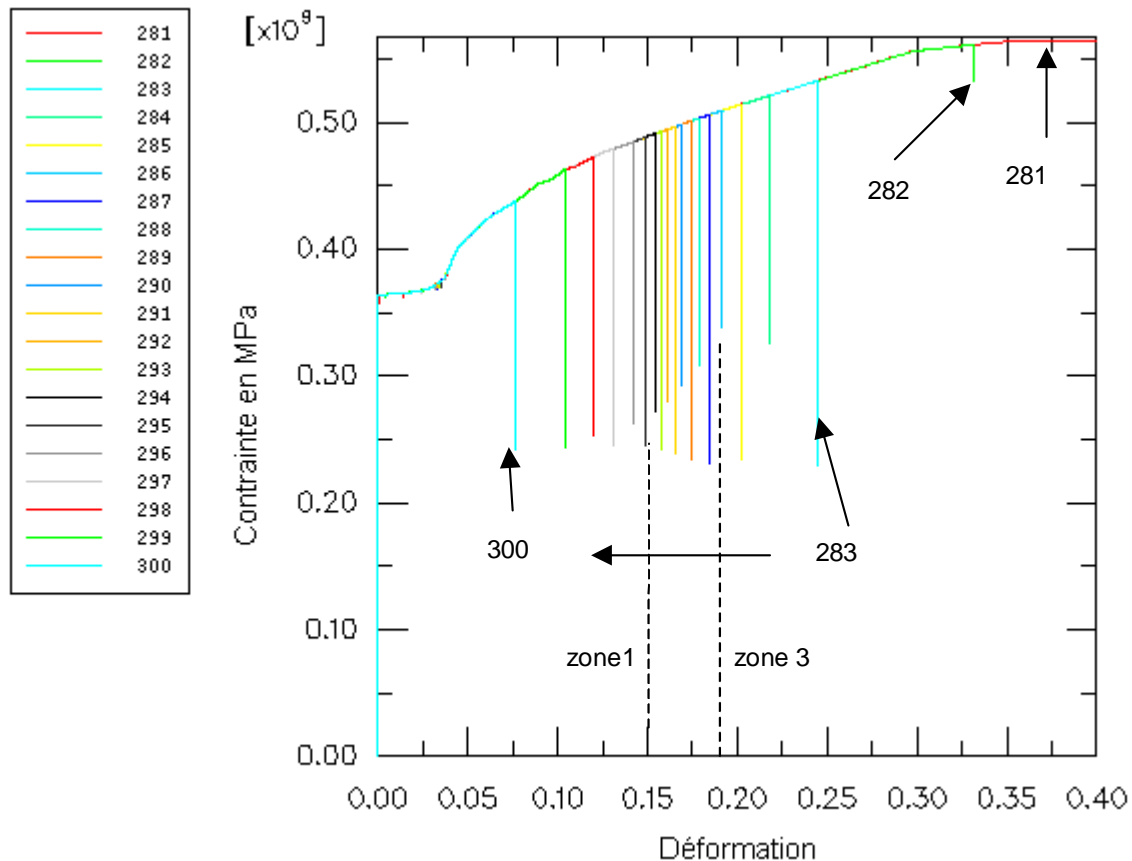


Figure 43 : Contrainte longitudinale dans les éléments situés sur l'axe longitudinal de l'éprouvette obtenue par simulation éléments finis. L'élément 300 est l'élément le plus proche des mors, l'élément 281 est l'élément le plus central (figure 40). Courbes obtenues par simulation éléments finis d'une éprouvette d'acier.

Le nombre d'éléments déchargés est directement lié à la localisation de la déformation dans le centre de l'éprouvette. La considération de ce facteur est alors un excellent moyen de détection de la localisation au cours de la simulation. Schématiquement, la méthode consiste donc à comparer l'état de contrainte équivalente pour chaque élément entre un instant donné  $t$  et un instant  $t + dt$ . Il suffit de faire la différence entre les deux états de contrainte. Pour un élément :

- si  $\sigma_{t+dt} - \sigma_t > 0$  alors l'élément n'est pas déchargé.
- si  $\sigma_{t+dt} - \sigma_t < 0$  alors l'élément est déchargé.

Il suffit alors de compter les éléments entrant dans la seconde catégorie. Un petit programme de post traitement compte les éléments déchargés dans l'éprouvette. L'application de la méthode sur la simulation de l'éprouvette en acier génère le graphe de la figure 44. Le premier pic observé de la courbe correspond au plateau en contrainte de la loi de comportement observé pour les petites déformations plastiques. Ce plateau provoque momentanément une instabilité en déformation. La vraie localisation de la déformation se déclenche à l'instant 0,06s. Cette localisation est indiquée par le nombre croissant d'éléments déchargés. Nous pouvons vérifier à quelle durée de simulation le déclenchement de la localisation apparaît en étudiant les forces appliquées sur l'éprouvette. Comme pour le premier cas, la force de réaction est déterminée par sommation sur les nœuds d'extrémités pour lesquels le déplacement est imposé (figure 45). Il existe effectivement un maximum pour le temps 0,06s (correspondant à une déformation de 0,19) qui entraîne la décharge élastique des éléments qui n'ont pas atteint cette déformation (figure 43). Quelques éléments, en s'écrouissant davantage, vont supporter la déformation jusqu'à ce que la localisation soit complète.

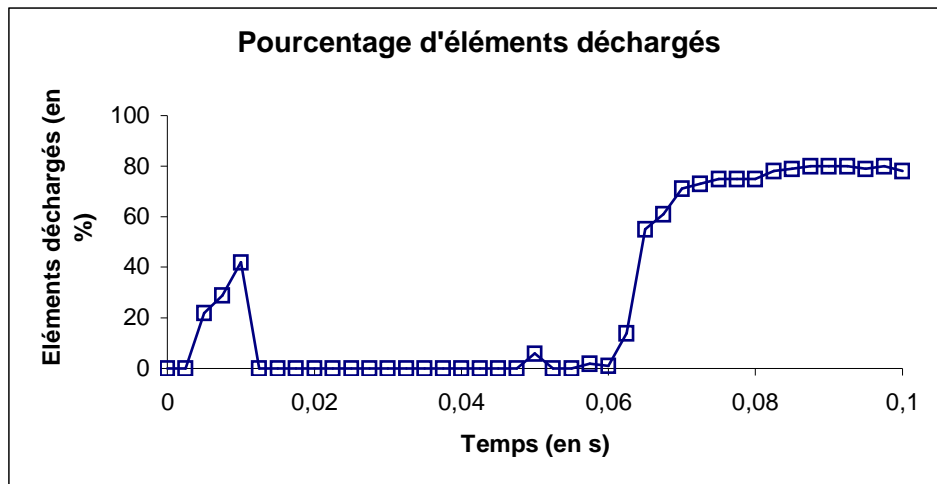


Figure 44 : Comptage des éléments déchargés lors de la simulation de l'éprouvette en acier Soudur.

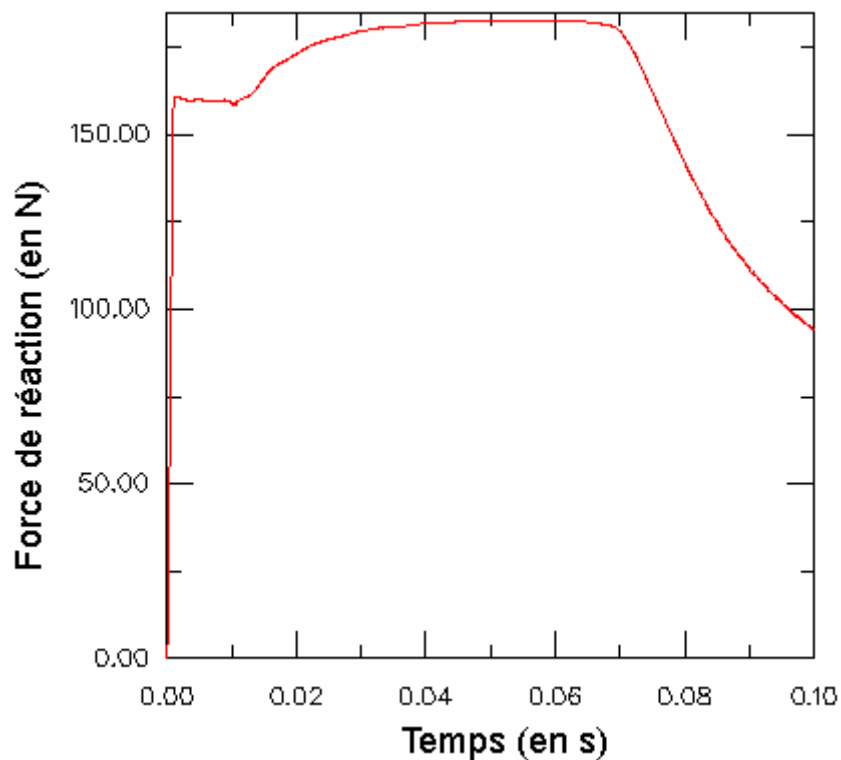


Figure 45 : Courbe force-déplacement simulée pour l'éprouvette en acier soudur. La force maximale est atteinte pour une durée de simulation de 0,06s.

#### Conclusion sur l'analyse de l'essai de traction

Aux questions posées en préambule, ce travail apporte les réponses directes suivantes.

- La localisation de la déformation dans l'éprouvette est déterminée par la réponse plastique du matériau et les conditions d'essai. Un essai de traction induit naturellement la localisation de la déformation. Le déclenchement de cette localisation est d'ailleurs correctement prédit par le critère de Considère (a posteriori, on se rend compte que ce critère se démontre en liant les conditions d'essais à la courbe d'écrouissage).
- Pour les métaux étudiés, il n'apparaît pas d'adoucissement lors de la déformation. La contrainte continue à croître.



- L'extensomètre introduit des aberrations lorsque l'éprouvette localise en dehors des bras de celui-ci.
- De façon indirecte, on déduit les points suivants.
- On mesure alors l'impact de la détermination de la courbe  $(\sigma_{eq}, \varepsilon_{eq})$  sur la réponse simulée du matériau. Cette constatation pose le problème déjà mentionné de l'utilisation de formes analytiques de type  $\sigma_{eq} = K\varepsilon_{eq}^n$  dans des simulations éléments finis ayant pour objectif de prédire la localisation. Ces formulations introduisent souvent un lissage artificiel des données expérimentales. Il semble alors que ces formulations sont alors en effet trop imprécises pour pouvoir être utilisées dans le but de prédire l'apparition de la striction.
  - La localisation est rapide si l'écrouissage diminue à partir du moment où l'éprouvette a atteint des conditions de localisation.
  - Le profil de déformation, au moment où le critère de Considère est vérifié, entraîne une réponse de type ductile ou fragile. Cette propriété n'est pas directement intrinsèque au matériau mais est liée à son écrouissage.

En effet, si la déformation est très homogène, tous les points de l'éprouvette entrent simultanément en condition de Considère : la rupture est quasiment immédiate à l'endroit le plus déformé. L'éprouvette n'a plus alors de résistance apparente.

Si la déformation n'est pas homogène, les points de l'éprouvette entrent progressivement dans l'état instable. Au sein d'une même surface (perpendiculaire à la direction de traction), il subsiste des zones où il y a un durcissement potentiel. La localisation se produit de façon progressive (ou diffuse).

Bien entendu ces résultats dépendent également de la viscosité du matériau. La localisation augmente localement la vitesse de déformation. Si le matériau est très visqueux, la localisation est retardée, si le matériau n'est pas visqueux, la localisation est accrue.

De façon complémentaire, on note que l'observation d'une seule image à un taux de déformation suffisamment important permet la restitution de la presque totalité de la courbe de traction. On dispose en effet d'un ensemble de points à différents taux de déformations pour la même force. L'analyse simultanée de ces points fournit une bonne portion de la courbe recherchée.

Ces travaux ont été menés depuis 1997 et ont fait l'objet successivement d'une communication dans un congrès, d'un article dans les actes et d'une publication acceptée dans une revue. Ils ont été effectués sous ma tutelle, dans le cadre d'un stage niveau maîtrise et d'une partie de travail d'un doctorat. Les résultats ont été confirmés si on se réfère à des thèses très récentes (voir [93] par exemple).

### Analyse de la déformation en expansion

L'expansion est l'un des modes de déformation qui apparaît lors des opérations d'emboutissage. L'objectif est ici d'analyser ce mode de déformation et de regarder de façon élémentaire comment un logiciel éléments finis simule et restitue le comportement en expansion. Afin de valider les analyses, une machine d'expansion a été développée. Elle est présentée de façon succincte dans la dernière partie.

#### Relations fondamentales

On considère le flanc de diamètre circulaire  $R$  d'épaisseur  $e$ , et soumis dans une direction quelconque à une pression périphérique  $\sigma$  (figure 46). On suppose que le matériau a un comportement plastique isotrope.

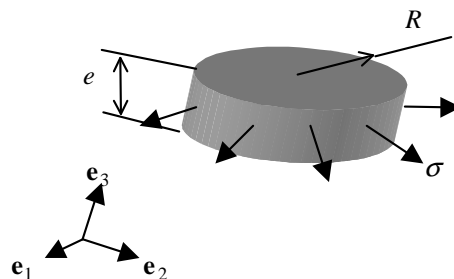


Figure 46 : Flanc soumis à une expansion.

Le tenseur des contraintes, dans le cas d'une contrainte équiaxiale, dans un repère orthonormé  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  est donné par :

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (152)$$

avec  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  nécessairement dans le plan de la tôle. Le tenseur des taux de déformation plastique est donné par :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & -2\dot{\varepsilon} \end{pmatrix} \text{ avec } \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{R}}{R} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{e}}{e}. \quad (153)$$

La contrainte équivalente au sens de Von Mises est :

$$\sigma_{eq} = \sigma, \quad (154)$$

alors que la déformation équivalente est donnée par :

$$\dot{\varepsilon}_{eq} = 2 \frac{\dot{R}}{R}, \quad \varepsilon_{eq} = 2 \ln\left(1 + \frac{\Delta R}{R_0}\right), \quad (155)$$

si on appelle  $R_0$  le rayon initial de la tôle. L'état de contrainte équiaxiale dans un matériau isotrope a des propriétés remarquables :

- sa représentation ne dépend pas de l'orientation de la tôle autour de  $\mathbf{e}_3$ ,
- les contraintes de cisaillement maximales sont sur des cônes d'axe perpendiculaire au plan de la tôle.

On constate également que la déformation plastique accumulée équivalente pour un accroissement de rayon augmente plus vite qu'en traction pour le même déplacement appliqué aux extrémités de l'éprouvette. Ainsi, dans le cas de la figure 47, on compare les déformations accumulées :

$$\varepsilon_{eq}(\text{expansion}) = 2 \ln\left(1 + \frac{\Delta R}{R_0}\right), \quad \varepsilon_{eq}(\text{traction}) = \ln\left(1 + \frac{\Delta R}{R_0}\right). \quad (156)$$

Le corollaire de cette assertion est que lorsque le matériau est soumis à de la traction et de l'expansion à un incrément de contrainte identique, la zone en traction se déforme plus.

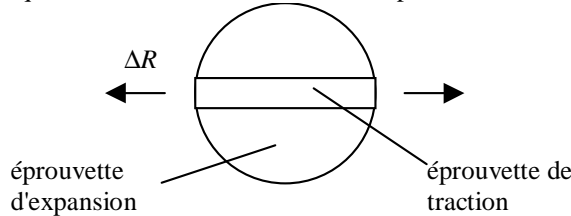


Figure 47 : Déplacements imposés à une éprouvette de traction et d'expansion

La condition de localisation sur un flanc en expansion est obtenue en suivant un principe de calcul similaire à celui appliqué pour obtenir le critère de Considère. La force résultante sur un demi-disque  $S = 2Re$  est  $F = \sigma S = 2\sigma Re$ . Lorsqu'il y a localisation,  $dF = 0$  et on déduit en utilisant les relations (153) que :

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = d\varepsilon. \quad (157)$$

Lorsqu'on utilise les grandeurs équivalentes, on obtient :

$$\frac{d\sigma_{eq}}{d\varepsilon_{eq}} = \frac{1}{2} \sigma_{eq}. \quad (158)$$

Pour comparer avec l'essai de traction, supposons que la loi d'écrouissage est donné par  $\sigma_{eq} = K\varepsilon_{eq}^n$ . Dans ce cas la localisation est obtenue pour  $\varepsilon_{eq} = 2n$  en expansion alors que pour la traction on trouve  $\varepsilon_{eq} = n$ . La localisation se produit avec deux fois plus de déformation accumulée en situation d'expansion qu'en traction. En

allongements comparés (figure 47), c'est donc la traction qui localise comparativement en premier.

Pour un matériau à comportement plastique isotrope, lorsque différents modes de déformation sont en compétition, c'est celui qui présente un écrouissage moindre pour une déformation donnée qui sera préférentiellement actif. C'est pourquoi (figure 48) lors de l'opération de mise en forme d'un godet, indépendamment des problèmes de frottement, il est pratiquement impossible d'obtenir une déformation conséquente du fond du godet. Les zones en traction (large) sont plus déformées. C'est en principe dans ces zones que se produit la localisation.

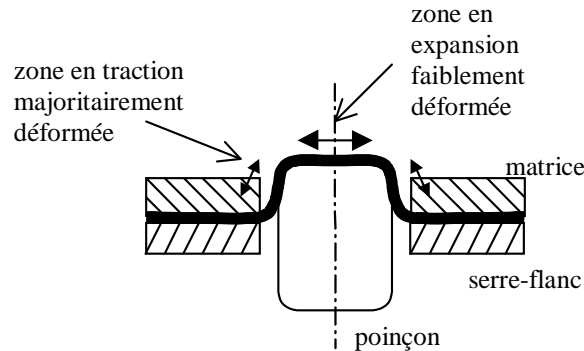


Figure 48 : Répartition des déformations sur un flanc embouti.

#### Simulation de l'essai d'expansion

La simulation montre comment se comporte le code de simulation éléments finis par rapport à ce mode de déformation. Pour cela une expérience numérique est pratiquée sur un disque en acier (même matériau qu'en traction) de diamètre 200 mm et d'épaisseur 1mm. La courbe contrainte déformation de ce matériau est donnée figure 39. Un déplacement radial est imposé sur le pourtour du disque.

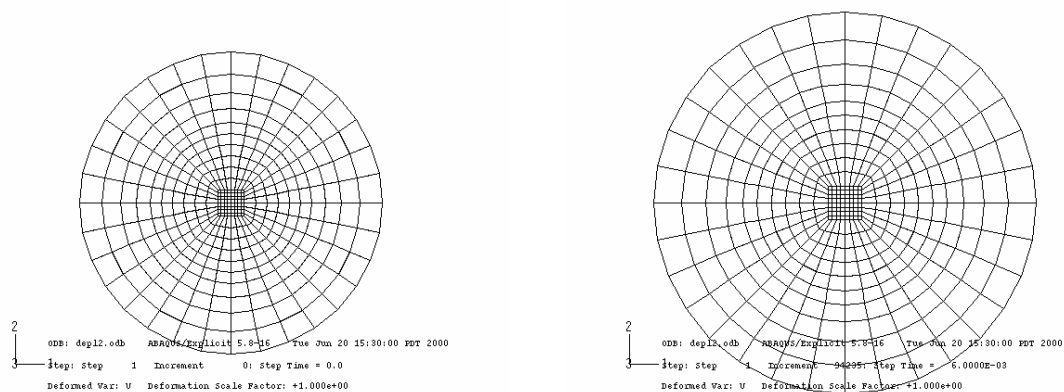


Figure 49 : Maillage du disque, figure de gauche : non déformé, figure de droite : après déformation.

De façon inattendue, le disque conserve une forme circulaire sans localisation apparente même pour de très grands taux de déformation. La détection et le comptage d'éléments déformés ne fait apparaître aucun élément déchargé alors que la force sur un demi-disque est passée par un maximum et a commencé à décroître (figure 50).

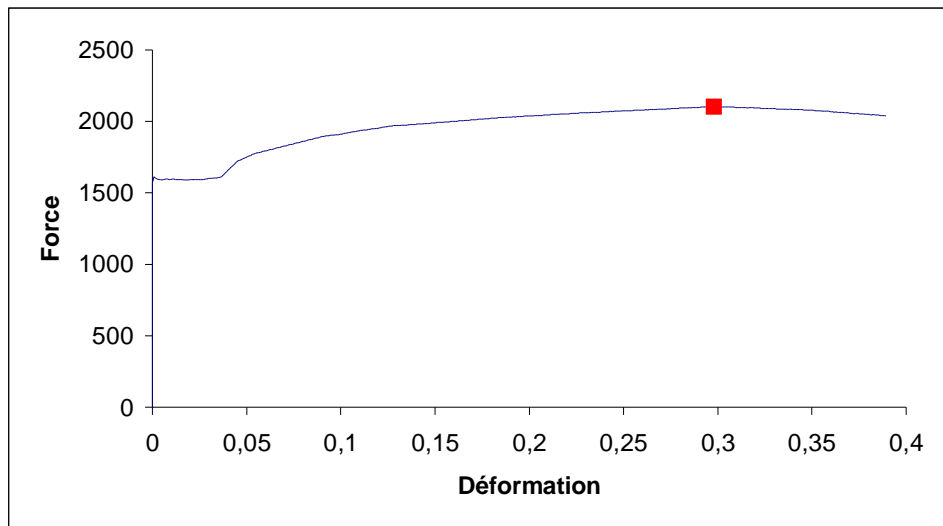


Figure 50 : Courbe de la force sur une demi-section en fonction de la déformation radiale, simulée pour l'expansion du disque de la figure 49.

La valeur de la force passe par un maximum lorsque la déformation atteint 0,3. Pour cette valeur de déformation, la contrainte correspondante et la valeur du module d'écroutissage mesuré sur la courbe contrainte déformation de la figure 51 vérifient :

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0,45\sigma, \quad (159)$$

Ce qui est pratiquement en accord avec le critère de localisation proposé relation (158) pour l'expansion. Pour le même matériau, on rappelle que la localisation se déclenche pour une valeur de la déformation équivalente d'environ 0,19.

L'intégration numérique restitue le même comportement que celui prévu de façon analytique. Lorsque la condition de localisation est atteinte, la somme des efforts sur un demi disque passe par une valeur maximale. Par contre, les déformations restent, dans ce cas, parfaitement homogènes sur l'ensemble des éléments. Cet ensemble de constatations rend un éventuel essai expérimental très intéressant. Il permettrait ainsi la détermination de la courbe contrainte équivalente déformation équivalente plus loin que pour l'essai de traction. Il serait également possible de comparer sur la première partie, si la courbe issue de l'essai de traction est identique à celle issue de l'essai d'expansion. Ceci validerait son unicité. De plus l'essai, au regard des simulations, apparaît très stable : il n'y a pas de localisation. Le seul problème, non de moindre importance, est de réaliser des conditions aux limites correctes pour imposer l'état équiaxial de contrainte. Malgré cette difficulté, le développement d'une machine de sollicitation équiaxiale a été entrepris.

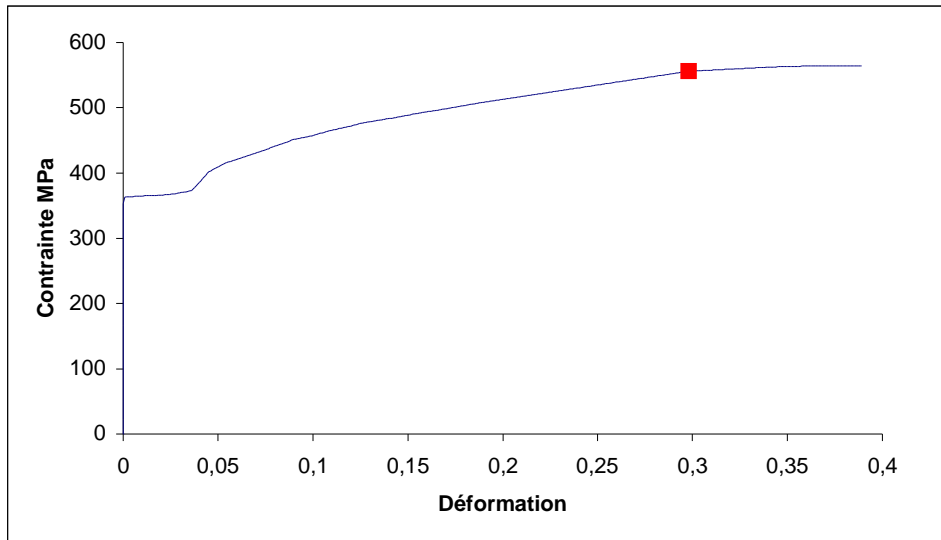


Figure 51 : Courbe contrainte radiale – déformation simulée pour l'expansion du disque de la figure 49.

#### Machine d'expansion équiaxiale

Il existe déjà des machines de ce type, le plus souvent désignées par machines de traction équibiaxiale. Leur conception est dérivée de la représentation usuelle de l'état équiaxial de contrainte par exemple ici donné sur un cube (figure 52).

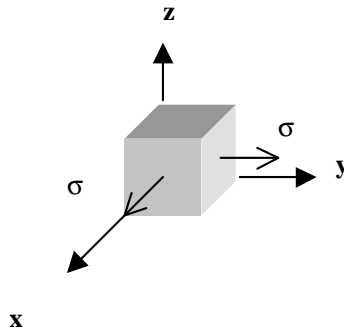


Figure 52 : Représentation d'un état de contrainte biaxial.

Cette représentation à l'instar de celle proposée figure 46, ne met pas en évidence que l'état de contrainte est axisymétrique et non bidirectionnel. Bien que ces deux représentations soient équivalentes d'un point de vue formel, l'utilisation de ces représentations à des fins de conceptions n'induit pas le même résultat. Dans le cas bidimensionnel, on obtient une machine d'essai qui applique des déplacements perpendiculaires à une éprouvette en forme de croix schématisée figure 53.

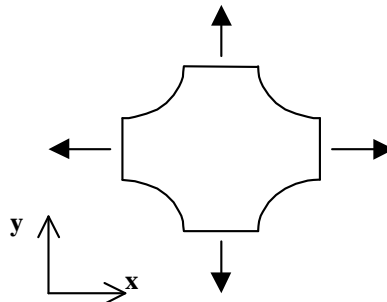


Figure 53 : Représentation schématique d'un essai de traction "équibiaxiale" sur éprouvette traditionnelle en forme de croix.

Ce type de conception justifie le qualificatif de "biaxial" utilisé pour cette machine. Une telle machine a, par exemple, été développée à Grenoble par l'équipe de Boehler [58] et nécessite l'utilisation d'éprouvettes en croix optimisées pour garantir autant que faire se peut un état homogène des déformations. Le pilotage indépendant de chaque axe de la machine autorise l'exploration de différents états plans de contrainte.

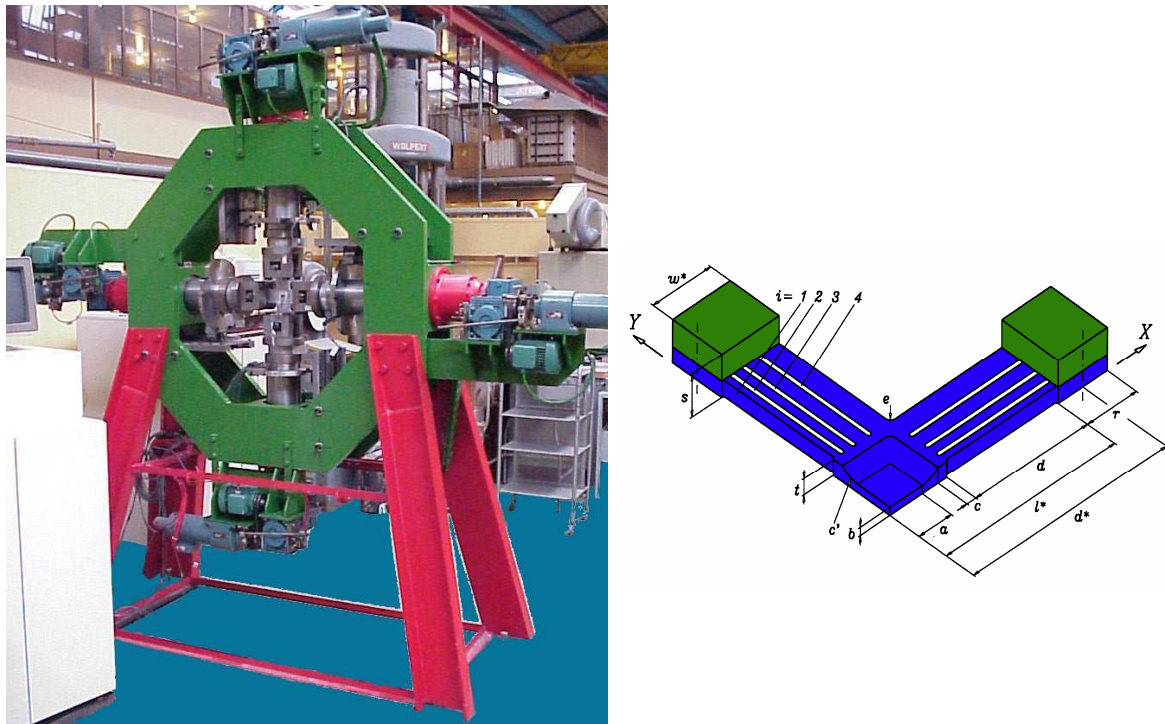


Figure 54 : Photographie d'une machine d'expansion biaxiale (à gauche). Représentation schématique de l'éprouvette de traction biaxiale optimisée dans le domaine élastique (à droite). Photos aimablement prêtées par G. Losilla [58].

Pour pouvoir développer rapidement une machine équiaxe, une autre voie a été suivie selon le schéma de la figure 46. L'application de ces conditions aux limites semble mieux respecter la nature de la déformation en expansion. Comme on souhaite obtenir la valeur des efforts appliqués, il n'est pas possible d'utiliser par exemple un essai type Marciniack sur presse pour imposer une déformation en expansion. Les conditions expérimentales complexes rendent alors impossible le calcul des efforts radiaux sur la partie de l'échantillon sollicitée en expansion à partir des efforts sur le poinçon. Une machine spécifique a été étudiée.

#### *Développement d'une machine d'expansion originale*

Une machine qui impose des déplacements (figure 55) suivant 9 directions radiales a été développée.

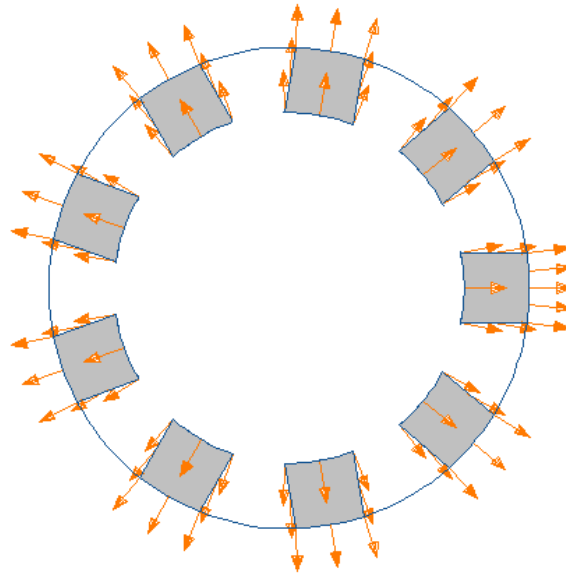


Figure 55 : Schématisation des déplacements imposés pour reproduire les conditions d'expansion.

Le principe de la machine (figure 56) restreint à un plan est dérivé de celui utilisé pour certains crics de voiture. L'application d'une force axiale  $F_A$  (avec une machine traction/compression classique) provoque l'application de forces radiales  $F_R$  sur la tôle. La connaissance de la géométrie de la machine est nécessaire au calcul des efforts et des déplacements appliqués à la tôle.

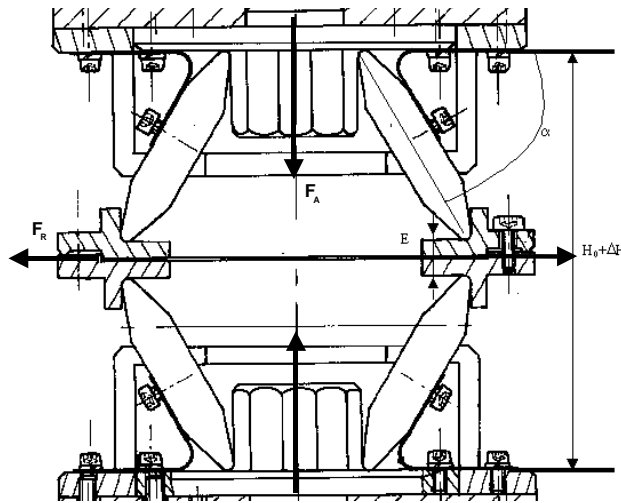
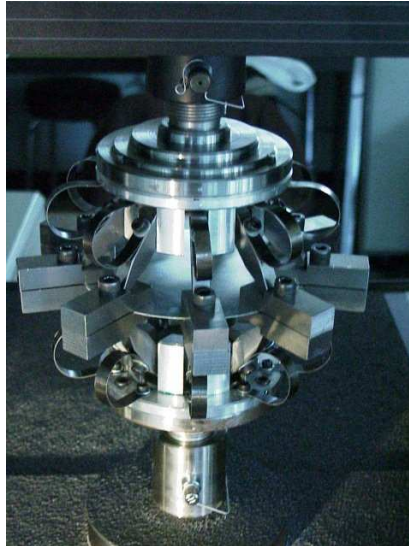


Figure 56 : Principe de la machine de déformation équiaxiale.

La machine a été dimensionnée et réalisée (figure 57). La simulation éléments finis d'un essai au moyen de la machine sur un flanc avec comportement plastique isotrope, fait apparaître une large zone de déformation homogène. Par contre, les concentrations de contraintes en tête des mors sont importantes.

#### Premiers résultats

On a utilisé la machine pour faire une première campagne d'essais sur de simples flancs circulaires. La rupture prématurée de l'éprouvette très proche des mors conduit finalement à utiliser la machine en plusieurs étapes pour obtenir un flanc avec une déformation centrale importante (environ 10%). Le processus repose sur l'adoption d'un grand flanc de départ, pour pouvoir le découper, après rupture à un diamètre plus petit pour appliquer une nouvelle déformation.



*Figure 57 : Photographie de la machine d'expansion équiaxiale en situation d'essai sur un flanc circulaire.*

Les premiers résultats issus de l'utilisation de cette machine en développement mettent en évidence un taux d'écroutissage très important obtenu avec ce type d'essai. On obtient également des déformations homogènes intéressantes (jusqu'à 10%) en connaissant les valeurs des contraintes. Avec les éprouvettes utilisées, on constate que la traction est avantagée. Cette observation confirme ce qui avait été noté d'un point de vue analytique : le durcissement en expansion est plus grand qu'en traction. A la moindre occasion, le matériau se "dérobe" en traction qui devient de fait un des modes privilégiés de déformation. Ceci confirme l'analyse effectuée plus haut. Même si un travail de mise au point est nécessaire, en améliorant la géométrie du flanc, les possibilités de la machine permettent d'envisager plusieurs axes de travail :

- détermination de la relation contrainte équivalente déformation équivalente puis comparaison avec l'essai de traction,
- effet d'une déformation équiaxiale importante sur le durcissement en traction pour optimisation des propriétés mécanique des pièces embouties,
- étude de la localisation de la déformation en expansion.

### Conclusion

L'analyse de l'expansion d'un point de vue analytique et expérimental met en évidence quelques particularités de ce mode déformation. L'essai d'expansion apparaît comme très intéressant car en imposant des conditions aux limites idéales la déformation est très homogène même en condition de localisation. Par contre comme l'expansion écroute plus rapidement le matériau, la traction peut être rapidement privilégiée. Ceci est vérifié au moyen d'une machine créée spécifiquement pour appliquer le mieux possible ce mode de déformation à un échantillon circulaire. Cette constatation justifie le protocole de contre-flanc utilisé dans l'essai de Marciniack pour mieux obtenir l'expansion.

### 1 Simulation d'opérations d'emboutissage sur matériau isotrope

On souhaite appliquer et vérifier les concepts formulés dans les deux précédentes parties. Pour cela dans un premier temps, on choisit de simuler le comportement d'un matériau isotrope : l'acier Soldur utilisé à différentes reprises dans cette étude et dont nous avons soigneusement identifié la courbe d'écroutissage au moyen du logiciel d'analyse des déformations. Cette courbe est présentée figure 39. L'opération de mise en forme choisie ici est la réalisation d'un godet à fond plat. L'emboutissage du flanc est réalisé avec le serre-flanc bloqué pour ne pas avoir de glissement du flanc par rapport à la matrice. Cette opération dont l'outillage est décrit figure 58, a été également réalisée sur la presse du laboratoire.



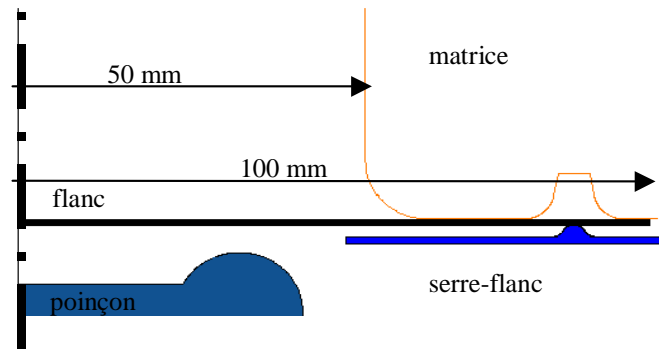


Figure 58 : Description axisymétrique de l'outillage pour réalisation du godet.

Les points suivants ont fait l'objet d'une attention toute particulière.

- Si la courbe d'érouissage utilisée est correcte (déterminée par analyse d'images), les résultats de la simulation doivent présenter un bon agrément avec les résultats expérimentaux, notamment en ce qui concerne les valeurs des efforts appliqués.
- La répartition des déformations doit se faire au profit de la traction le long de la partie cylindrique.
- On doit pouvoir prédire la localisation en comptant le nombre d'éléments déchargés.

## 1.1 Modélisation

### 1.1.a Maillage du flanc

Le flanc a un diamètre initial de 200 mm et présente une épaisseur de 1mm. Le maillage a été réalisé en éléments cubiques à 8 nœuds et 1 point d'intégration pour traiter le problème avec la version explicite d'Abaqus<sup>TM</sup>. Un exemple de maillage est donné sur la figure 59.

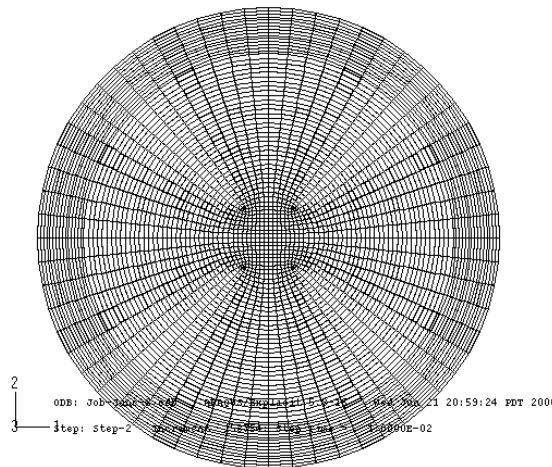


Figure 59 : Exemple de maillage utilisé pour la description du flanc.

### 1.1.b Modélisation de l'outillage

Le maillage des outils (figure 60) a été effectué en respectant au mieux leur géométrie. Ainsi, le jonc de serrage qui empêche le glissement de la pièce entre le serre-flanc et la matrice a été pris en compte. Les éléments rigides ont été utilisés pour diminuer les temps de calcul.

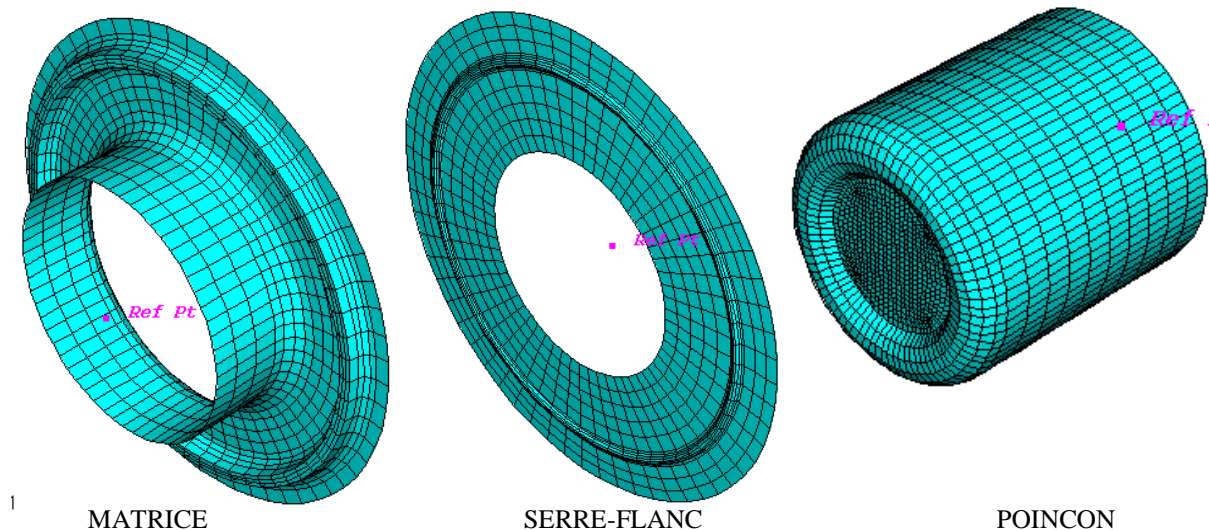


Figure 60 : Description de l'outillage.

### 1.1.c Loi de comportement

La loi de comportement est une loi de type élastoplastique isotrope. La courbe de référence est celle définie par les essais expérimentaux en traction.

### 1.1.d Conditions aux limites

Le coefficient de frottement entre tous les éléments solides a été fixé à 0,1. C'est une valeur moyenne qui correspond aux couples de matériaux en présence. Le système de surface maître esclave pour la gestion du contact a été adopté. Les degrés de liberté de la matrice sont tous annulés. Deux étapes sont nécessaires pour appliquer complètement les conditions aux limites.

Le serrage du serre-flanc réalise tout d'abord le blocage de la pièce. Il provoque une déformation plastique de celle-ci au niveau du jonc de retenue. L'effort appliqué sur le serre-flanc est environ 200 000 N, ce qui correspond aux conditions expérimentales imposées par les 6 vérins de serrage de la presse lorsqu'ils sont soumis à une pression de 60 MPa.

Pour la seconde étape, on impose le déplacement du poinçon avec une vitesse axiale de 3m/s. Cette vitesse est appliquée progressivement au moyen d'une rampe puis conservée constante la durée restante de l'essai. Ceci afin d'éviter d'avoir une accélération infinie si on applique directement la vitesse dès le début de la simulation.

## 1.2 Comparaison simulation et expérience

La comparaison entre deux objets tridimensionnels n'est pas simple à traiter. L'un est accessible par des mesures de géométrie effectuées sur l'échantillon alors que l'autre l'est au travers d'un ensemble de points : les nœuds du maillage déformé. Le paragraphe expose quelques uns des points qui ont été retenus pour faire les comparaisons.

### 1.2.a Comparaison générale

Pour un enfoncement de 25 mm du poinçon, la force exercée sur le poinçon est maximale et vaut 86 600 N. Elle correspond à une pression de 10 MPa appliquée sur le vérin du poinçon. La forme de l'embouti est donnée sur la figure 61 à gauche. Celui-ci est rompu car il n'a pas été possible d'arrêter l'essai lorsque la force a atteint son maximum.

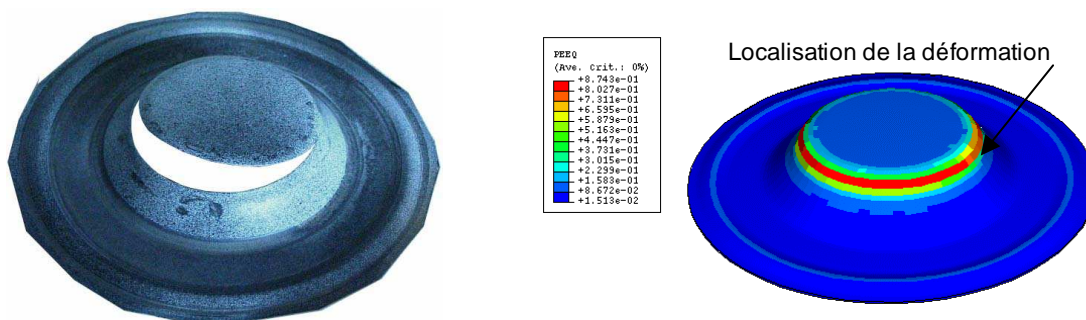


Figure 61 : Photographie d'un flanc embouti et isovaleurs de la déformation équivalente sur la forme déformée à partir des données de la simulation.

Les isovaleurs sont reportées sur l'échantillon déformé pour le même déplacement du poinçon. Deux points valident la modélisation adoptée. La valeur d'effort simulée correspondante est de 86 000 N, ce qui semble indiquer que le niveau général de l'écrouissage simulé du matériau est correct. La localisation annoncée par la simulation située juste avant l'arrondi imprimé par le poinçon est en correspondance avec l'expérience. La rupture du flanc s'est en effet produite à cet endroit.

### 1.2.b Déformation de la partie en expansion

Selon nos pronostics, la partie supérieure du godet ne devrait que très peu être déformée aussi bien expérimentalement qu'en simulation. Dans les mêmes conditions de déformation que précédemment, on obtient des déformations sur la partie en expansion de l'ordre de 5% alors que les déformations dans les zones en traction sont jusqu'à 10 fois supérieures (figure 62).

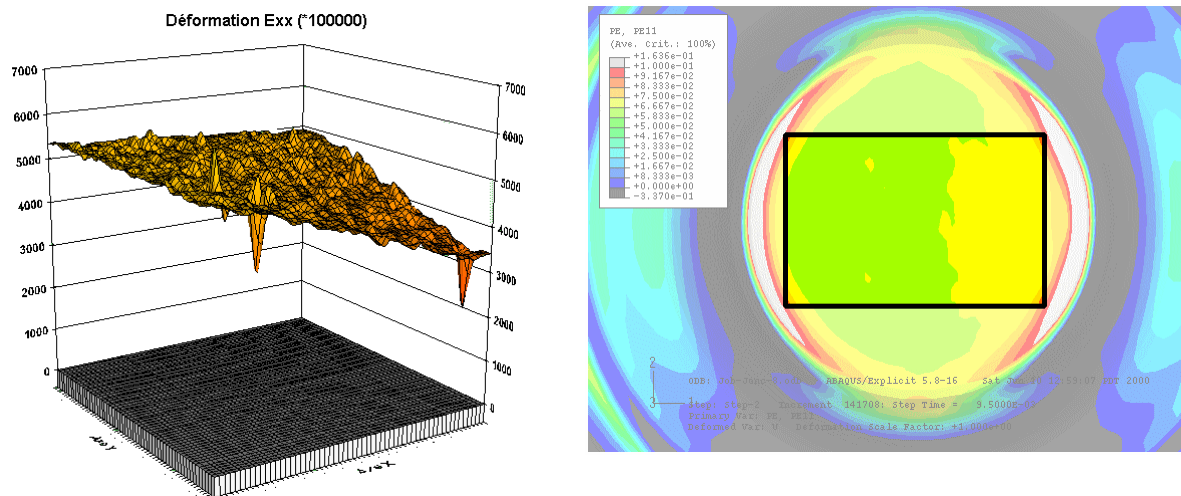


Figure 62 : Analyse des déformations suivant x de la partie du flanc en expansion. À gauche, les iso valeurs déterminées expérimentalement sont comprises entre 3,5 et 5% ; à droite, les iso valeurs issues de la simulation sont comprises entre 6 et 7%.

La déformation simulée est quant à elle de l'ordre de 6%. Différents facteurs sont éventuellement à l'origine de cette légère différence.

- Le coefficient de frottement joue un rôle sur la répartition des déformations. Compte tenu des moyens expérimentaux accessibles, nous n'avons aucune certitude quant à la valeur moyenne considérée lors de la simulation.
- La question de la validité de l'utilisation de la courbe contrainte—déformation déterminée en traction pour obtenir le comportement en expansion reste posée.

On constate par ailleurs une petite dérive des déformations mesurées expérimentalement qui semblerait indiquer, soit une hétérogénéité des propriétés mécaniques du matériau, soit une variation du coefficient de frottement sur la circonférence du poinçon.

### 1.2.c Localisation versus nombre d'éléments déchargés

Lors de la simulation, le nombre d'éléments déchargés est enregistré. La figure 63 donne le pourcentage d'éléments déchargés en fonction du temps de simulation. À partir de 0,015s, la localisation s'amorce comme en témoigne le nombre croissant d'éléments déchargés à partir de ce moment. Le maximum de la force est atteint un peu plus tard entre 0,17 et 0,18 secondes, correspondant à un pourcentage de 45% d'éléments déchargés.

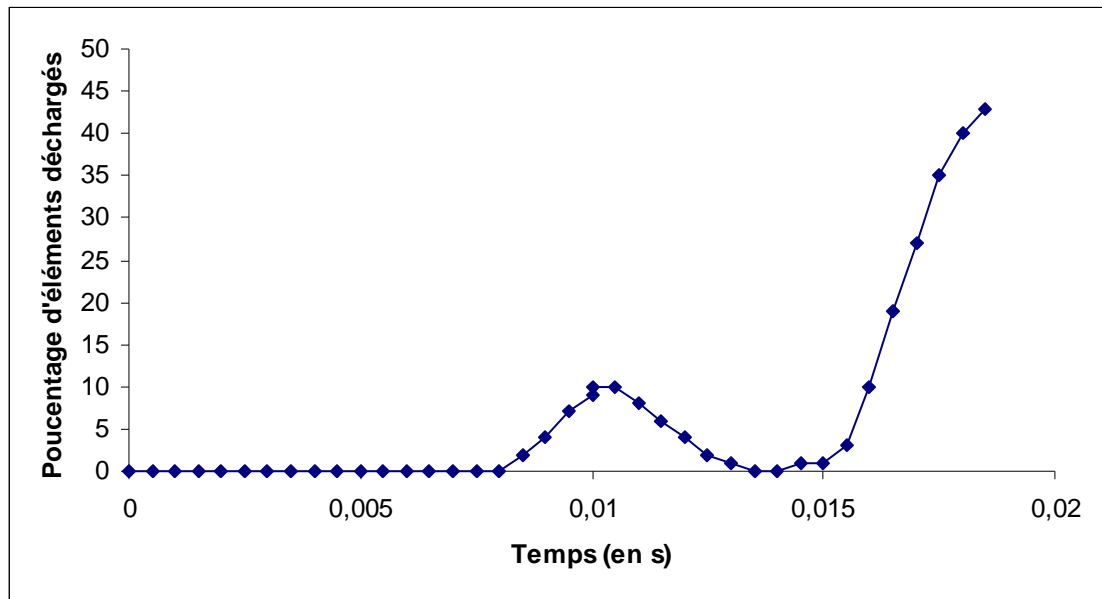


Figure 63 : Utilisation du critère "éléments déchargés" pour déterminer si la localisation de la déformation a lieu sur la simulation d'une opération simple d'emboutissage.

Le comptage des éléments met donc en évidence correctement la localisation de la déformation.

### 1.3 Conclusion

D'autres simulations du même genre et d'autres comparaisons sont utilisées pour valider notre description de l'écrouissage et le concept localisation associé détecté par comptage d'éléments déchargés. Par exemple, la formation d'un godet avec avalement (peu de pression au niveau du serre-flanc) est également testée. La bonne correspondance, à chaque fois, entre résultats simulés (distributions des épaisseurs, courbes forces—déplacement du poinçon, déformation...) et la détermination correcte (le cas échéant) de la localisation valide nos propositions. Par ailleurs, l'origine des répartitions des déformations et le processus de localisation dans l'échantillon sont mieux compris. Il apparaît normal que la localisation se situe dans la zone essentiellement déformée en traction juste avant l'arrondi.

## 2 Etude d'un cas limite : le titane

L'application d'un modèle n'est pas toujours possible. Le titane en feuille même après recuit sous vide illustre la difficulté à parfois définir un modèle pour décrire le comportement.

Le titane est nettement moins utilisé dans les opérations d'emboutissage que les aciers. Il existe cependant des références matières qui se présentent sous forme de produits laminés pour réaliser des produits emboutis. Au laboratoire, est développée en collaboration avec une entreprise réalisant des prothèses médicales (genoux, hanches et colonne vertébrale), une cage intersomatique (intervertébrale). La fonction de cette cage est de se substituer aux disques défaillants préalablement éliminés par le chirurgien pour favoriser ensuite la soudure osseuse entre les vertèbres au moyen d'un greffon qu'elle contient. Pour des raisons de compatibilités avec le corps humain, cette cage doit nécessairement être réalisée en titane (Ti40), matériau bio compatible. Pour des raisons d'ordre économique, il est souhaitable que les formes finales de la cage soient obtenues par emboutissage.

L'étude de faisabilité de l'opération s'effectue par simulation éléments finis. Il est alors nécessaire de déterminer la loi de comportement. Ce travail nécessite alors la caractérisation et la modélisation du comportement plastique du titane. Les propriétés plastiques du titane sont très particulières et rendent problématique l'application d'un modèle classique.

### 2.1.a Une anisotropie marquée

Les essais classiques de traction à 0°, 45° et 90° (figure 64) font ressortir une sensibilité marquée du comportement du matériau en fonction de l'orientation de l'éprouvette par rapport à la tôle laminée.

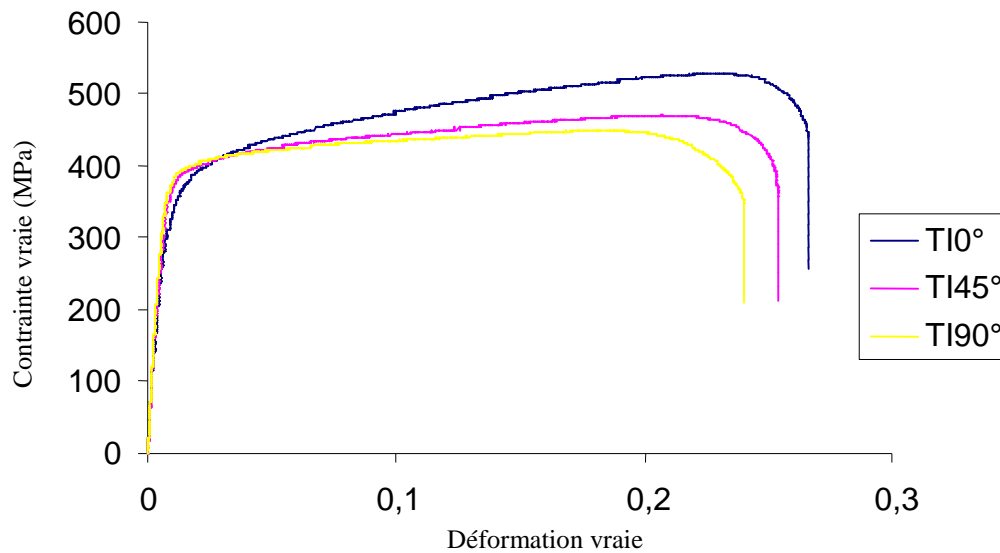


Figure 64 : Courbe contrainte déformation d'éprouvette en Ti40 à différentes orientations en traction.

### 2.1.b Des déformations hétérogènes

L'évaluation des déformations surfaciques (figure 65) avec le logiciel d'analyse d'images révèle des déformations localement très hétérogènes. Petit à petit la déformation se concentre dans des bandes macroscopiques persistantes.

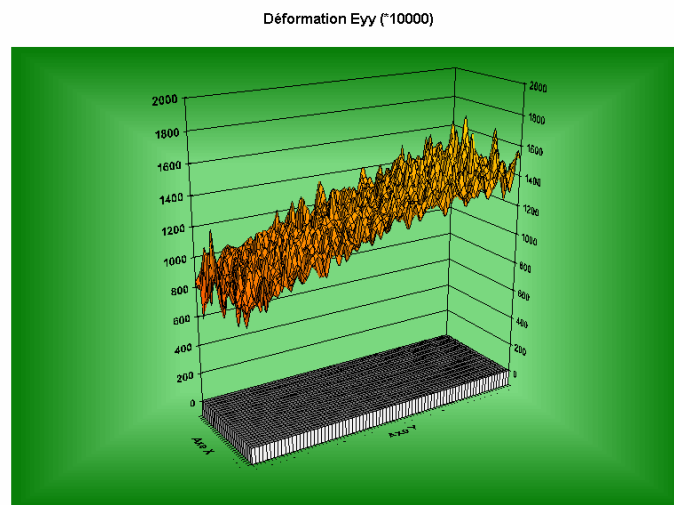


Figure 65 : Déformations longitudinales d'une éprouvette de Ti40 en traction avant localisation (déformation moyenne=0,12.)

Ce même constat s'effectue en expansion (figure 66).

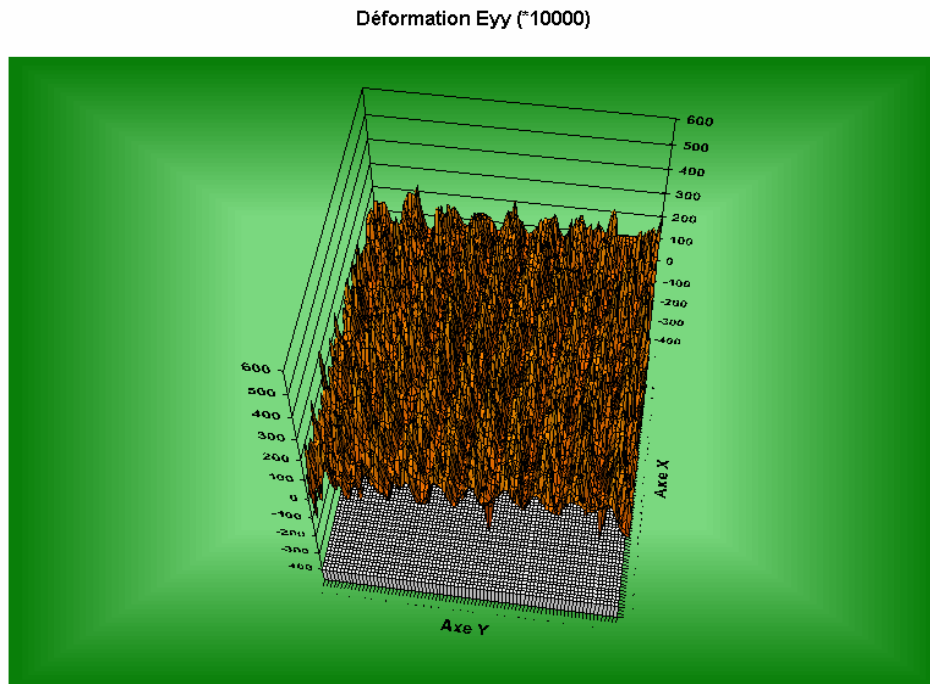


Figure 66 : Déformation d'une éprouvette de Ti40 en expansion (déformation moyenne=0,02).

Lorsqu'on tente de calculer les coefficients d'anisotropie, les résultats sont alors complètement erratiques (figure 67).

Coefficient d'anisotropie transverse

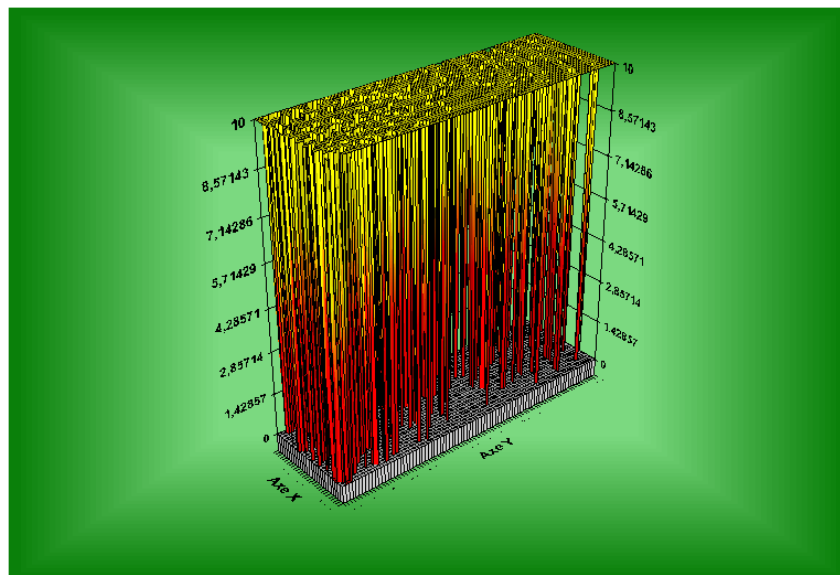


Figure 67 re : Calcul automatisé des coefficients d'anisotropie à partir des déformations d'une éprouvette de traction.

De plus les valeurs moyennes des coefficients d'anisotropie s'avèrent être non constantes au cours de la déformation [3].

### 2.1.c Des références à la physique nécessaires

L'ensemble des phénomènes rend ardue la mise en place d'une modélisation de la plasticité du titane fondée sur

une homogénéité initiale des déformations. Macroscopiquement, il semble difficile d'apporter une explication à ces phénomènes. La mise en place d'une modélisation ne peut se faire que lorsque les aspects physiques à l'origine des bandes de déformations seront compris.

### 3 Bilan de la première partie

Le travail effectué a pour objectif de s'assurer qu'il est possible de simuler correctement des opérations simples d'emboutissage. Il est possible de le faire si on reste dans un cadre relativement restreint avec un matériau isotrope et une opération mono passe. Si la courbe de référence contrainte équivalente, déformation équivalente est déterminée avec suffisamment de précision, il est même possible d'accéder à une prédiction de la localisation en déterminant l'existence de zones déchargées dans le matériau.

Par contre, la sensibilité de la réponse numérique au comportement du matériau nous incite à travailler sur des lois de comportement plus générales que celles actuellement proposées. En effet, toutes les modélisations de la plasticité reposent essentiellement sur une courbe référence, obtenue la plupart du temps en traction. Cette courbe décrit la relation qu'il y a entre une contrainte et une déformation qualifiées d'équivalentes. Cette relation est considérée comme représentative du comportement général du matériau pour une sollicitation générale. Ceci se conçoit lorsque le matériau est isotrope. Physiquement l'isotropie est associée aux matériaux dont les grains ont une distribution d'orientation cristallographique complètement aléatoire et une grande possibilité d'accommodation de la déformation à travers de nombreux modes de déformation potentiels (les différents systèmes de glissement présentés dans le chapitre suivant). A l'opposé, l'anisotropie plastique du comportement existe pour des matériaux pour lesquels il existe des orientations privilégiées et/ou un nombre limité de modes de déformation a priori différents. Le titane semble être un fort bon candidat. Il y a alors fort peu de probabilités de déclencher, sous des sollicitations différentes, des mécanismes identiques comme dans le cas d'un matériau isotrope. Par exemple, la traction à  $0^\circ$  du titane active, selon toute vraisemblance, des modes de déformations, en nombre et en nature, différents de ceux à  $90^\circ$ . Il n'y a alors pas de raison de faire référence à une courbe unique pour deux comportements qui sont fondamentalement différents. La compréhension et la modélisation des mécanismes à l'origine de la plasticité semblent donc nécessaires pour :

- dans un premier mieux comprendre et simuler le comportement de matériaux anisotropes sous sollicitations complexes,
- puis étendre la modélisation à des matériaux au comportement non homogène.

Ce constat nous amène alors à travailler sur des lois de comportement à fondements physiques qui sont plus générales que les lois de comportement phénoménologiques. Les développements qu'on qualifie de multi échelles sont présentés dans le chapitre suivant.



### PARTIE 3 Description unifiée de la plasticité des monocristaux

L'objectif est ici de formuler la relation entre l'évolution de l'état de contrainte et la déformation en un point du matériau. Différents paramètres peuvent définir l'état du matériau et être utilisés dans cette relation. Afin d'obtenir une description générale et unifiée, on considère que le matériau n'est plus "homogène" en introduisant le traitement distinctif de chaque grain, caractérisé par son orientation cristalline. A ce niveau, la réponse globale d'un grain (ou monocristal) est obtenue (figure 68) en combinant différents événements élémentaires responsables de la plasticité. Dans notre cas, les mécanismes impliquant des densités de dislocations valables pour les métaux à structures cubiques à faces centrées sont principalement considérés.

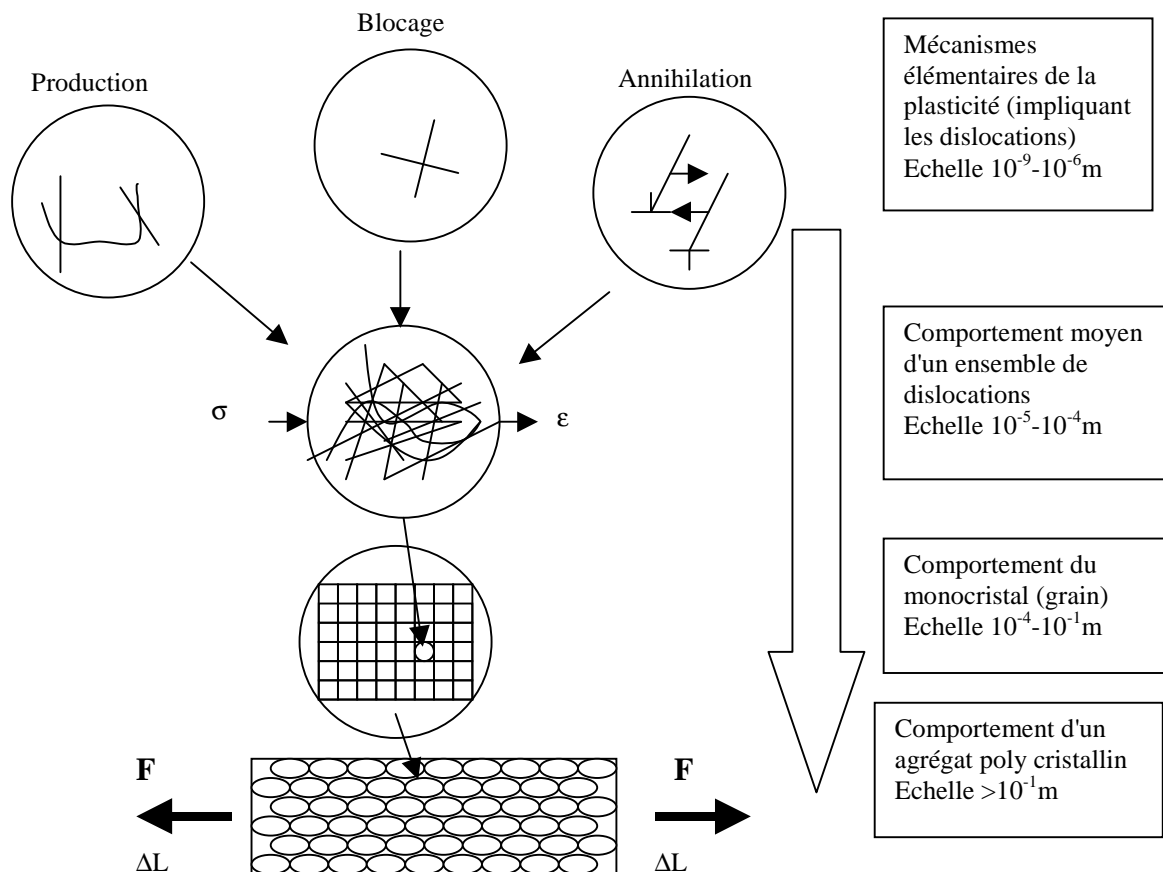


Figure 68 : Intégration des différentes échelles pour décrire la plasticité.

La qualité de la réponse finale du modèle (appliqué à la simulation d'un essai expérimental général) dépend de chaque étape du processus de modélisation. Le point essentiel est donc de mettre en place correctement les différentes étapes conduisant à l'obtention d'un modèle général de la plasticité.

La première étape consiste à sélectionner et identifier les mécanismes physiques à une échelle microscopique (qui, dans notre cas, impliquent essentiellement les mouvements de dislocations). On utilise ensuite les relations qui modélisent ces processus pour obtenir des relations générales moyennes à l'échelle de la mécanique des milieux continus : la loi locale du matériau.

Dans un deuxième temps, la résolution d'un problème général (correspondant à la simulation d'un essai expérimental par exemple) impose la définition d'un volume et de différentes frontières sur lesquelles différentes conditions sont imposées : force ou déplacement. La loi de comportement locale définit le matériau. On recherche alors à partir d'une configuration de départ, l'évolution de la configuration (déplacement, contrainte et évolution des paramètres internes du matériau).



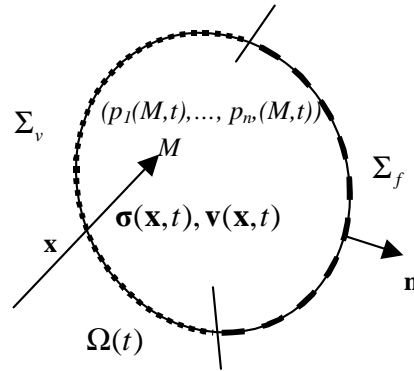


Figure 69 : Configuration générale d'un problème quasi statique sur un milieu déformable.

Considérons le solide déformable qui occupe le volume  $\Omega(t)$  à l'instant  $t$  (figure 69). La frontière  $\Sigma$  du volume est partagée en deux zones distinctes  $\Sigma_v$  et  $\Sigma_f$  sur lesquelles on impose respectivement le champ de vitesses  $v_i(t)$  et des forces surfaciques  $F_i(t)$ . Les inconnues de ce problème sont les champs de vitesses  $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$  et le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$  pour chaque point  $M$  du domaine. Le champ de vitesses solution de ce problème doit vérifier les conditions aux limites :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}_i(t) \text{ sur } \Sigma_v, \quad (160)$$

et le champ de contraintes doit vérifier les équations d'équilibre (quasi-statique) :

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)) = \mathbf{0} \text{ sur } \Omega_t \quad (161)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_i(t) \text{ sur } \Sigma_f$$

$\mathbf{n}$  est la normale à la surface au point considéré.

Les deux champs inconnus sont liés par la loi de comportement du matériau dont l'évolution est contrôlée par les variables internes du matériau  $(p_1(M,t), \dots, p_n(M,t))$ . Ce problème dans le temps et l'espace est généralement résolu par des techniques qui font appel à la discrétisation du temps et de l'espace. Dans le cas présent on a développé des méthodes d'intégrations analytiques pour les cas simples ou appliqué la méthode des éléments finis dans le cas quasi-statique.

Le troisième aspect inhérent à cette démarche, est l'identification du modèle puis sa validation sur des cas impliquant des monocristaux et des agrégats cristallins.

Les paragraphes suivants récapitulent les principaux résultats obtenus concernant le modèle de plasticité utilisé la première fois pendant mon travail de thèse. Ce travail de fond a permis d'améliorer le modèle de le valider soigneusement. On obtient finalement un modèle apte à décrire de façon unifiée le comportement élastoviscoplastique d'agrégats métalliques polycristallins. Cette démarche a été appliquée à diverses situations expérimentales sur différents métaux.

### Mécanismes élémentaires à l'origine de la plasticité

Des ouvrages fondamentaux décrivent de façon exhaustive tous les points relatifs à la plasticité cristalline [37], [61], [47], [57].

On précise les différentes notations adoptées pour l'étude. Les dislocations sont des défauts d'empilement atomique dont les mécanismes associés sont responsables d'une grande partie des propriétés plastiques des métaux. Après la présentation du concept de dislocation et du lien avec la déformation plastique, les différents mécanismes physiques sont présentés.

#### Les dislocations

On inclut sous cette rubrique la description des mécanismes élémentaires à l'origine de la déformation plastique. On y retrouve donc tous les mécanismes fondés sur le concept de dislocation.

##### Le concept

Les imperfections dans les métaux appartiennent à trois classes différentes :

- les défauts ponctuels,

- les défauts linéaires,
- les défauts plans.

Les dislocations appartiennent à la classe des défauts linéaires. La dislocation "coin" est la plus facile à représenter. Elle correspond à la ligne atomique du réseau cristallin perturbée par un demi plan d'atomes supplémentaire dans le réseau (figure 70).

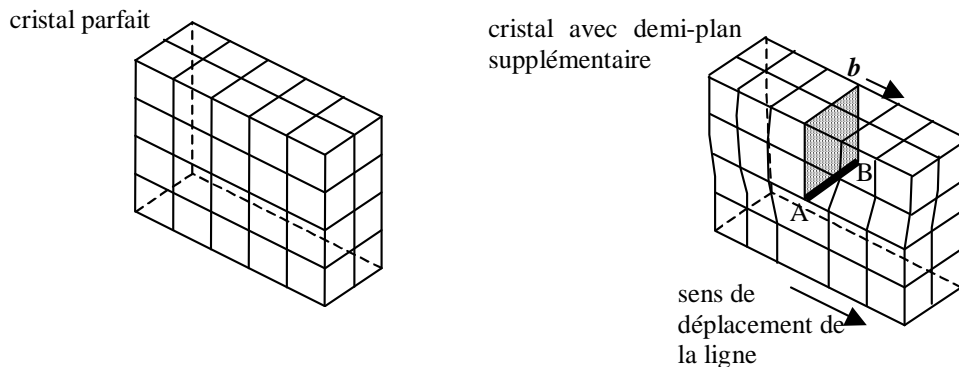


Figure 70 : Visualisation d'une dislocation coin dans un cristal. La ligne AB correspond à la ligne atomique perturbée et prend le nom de dislocation.

Le vecteur de translation  $\mathbf{b}$  pour insérer le demi-plan supplémentaire (qui correspond à l'épaisseur d'un plan atomique) est appelé vecteur de Burgers. D'une manière générale, pour une structure cristalline donnée, les dislocations ont des vecteurs de Burgers qui correspondent aux périodes les plus courtes du réseau. La dislocation vis correspond au défaut d'empilement de vecteur  $\mathbf{b}$  de la figure 71.

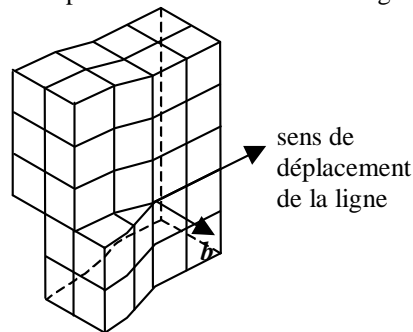


Figure 71 : Représentation schématique d'une dislocation vis.

A température ambiante, les dislocations sont principalement responsables des propriétés plastiques des métaux. Le mécanisme principal est le glissement de la dislocation dans un plan qui contient le vecteur de Burgers  $\mathbf{b}$  (figure 72). Sous une contrainte de cisaillement, la ligne atomique délimitant le demi-plan supplémentaire se solidarise avec celle du demi-plan inférieur en vis-à-vis, libérant le nouveau demi-plan supérieur voisin.

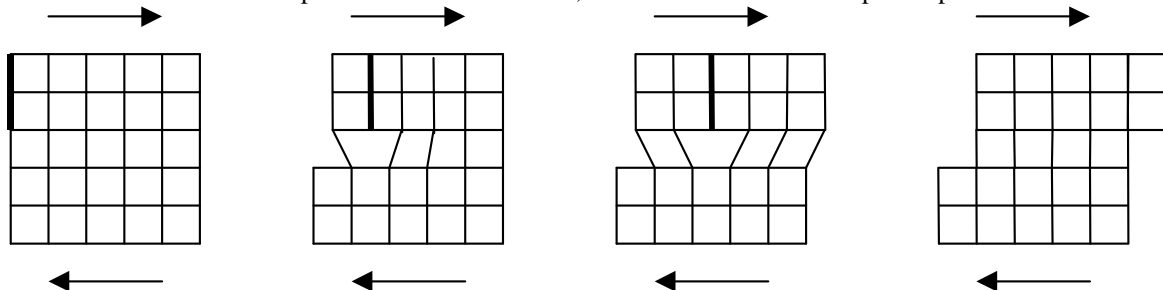


Figure 72 : Déplacement schématique d'une dislocation coin sous l'effet d'une contrainte de cisaillement.

Lorsqu'une dislocation traverse le cristal de part en part, elle laisse une marche résiduelle, de largeur la longueur du vecteur  $\mathbf{b}$ , correspondant à une déformation plastique permanente. Le plan dans lequel la dislocation peut se déplacer est appelé plan de glissement. Ce plan est donc un plan dense de l'empilement cristallographique. Il est caractérisé par sa normale. On utilise souvent la normale unitaire  $\mathbf{n}$  pour le caractériser. La combinaison plan de

glissement, direction de glissement définit ce qu'on appelle un système de glissement. En raison des symétries des structures métalliques, il existe plusieurs systèmes de glissement potentiels à l'intérieur d'un cristal de structure donnée. Un système de glissement est caractérisé par  $\mathbf{n}^{(s)}$  la normale unitaire au plan de glissement et  $\mathbf{g}^{(s)}$  le vecteur unitaire colinéaire au vecteur de Burgers correspondant. L'exposant (s) définit le numéro du système correspondant selon les conventions choisies.

Il reste à compléter ces notations par la définition de la densité de dislocations. Le rapport de la longueur cumulée des segments de dislocations appartenant à un système dans un volume donné est appelé densité de dislocation. Ce rapport a comme unité le  $\text{m}^{-2}$ .

#### *Lien avec la plasticité*

Le mouvement des dislocations est lié aux grandeurs contrainte et déformation. Le premier lien est historiquement connu sous le nom de loi de Schmid alors que le second est désigné par la relation d'Orowan.

#### Loi de Schmid

La **loi de Schmid** donne la condition générale d'écoulement sur un système. Une dislocation devient mobile si, la projection du vecteur contrainte appliqué dans son plan de glissement sur la direction de glissement unitaire est égale à une valeur seuil baptisée  $\tau_{\mu}^{(s)}$ . On appelle cission résolue  $\tau^{(s)}$  pour le système (s) la valeur :

$$\tau^{(s)} = (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}^{(s)}) \cdot \mathbf{g}^{(s)}, \quad (162)$$

où le tenseur de contrainte appliquée est désigné par  $\boldsymbol{\sigma}$ . La loi de Schmid traduit ces concepts pour déterminer s'il existe un taux de cisaillement  $\dot{\gamma}^{(s)}$  sur un système (s) :

$$\left. \begin{array}{l} \tau^{(s)} = \tau_{\mu}^{(s)} \\ \dot{\tau}^{(s)} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{\gamma}^{(s)} > 0 \quad (163)$$

Ce critère traduit une vision élastoplastique du phénomène et nécessite la détermination de la valeur du taux de cisaillement par un autre moyen. Un modèle d'écoulement élastoviscoplastique précise à la fois le critère d'activation et la relation entre la contrainte résolue et la vitesse de déformation  $\dot{\gamma}^{(s)}$ .

#### Relation d'Orowan

On aborde le problème qui consiste à passer du comportement individuel d'une dislocation au comportement plastique macroscopique du matériau. On considère (figure 73) un parallélépipède de matière contenant une dislocation coin parallèle à la dimension  $l$ . Lorsque cette dislocation traverse le parallélépipède et parcourt la longueur  $dx$ , elle laisse deux marches opposées de largeur  $b$  sur les deux faces perpendiculaires au plan de glissement.

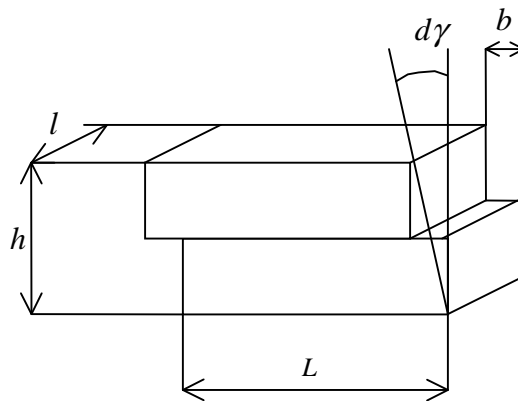


Figure 73 : Parallélépipède cisailé par une dislocation de type coin.

Le cisaillement obtenu s'écrit :

$$d\gamma = \frac{b}{h} = \frac{l}{Lh} bL = \rho_m b dx. \quad (164)$$

Ce calcul fait apparaître la longueur de la dislocation mobile divisée par le volume du parallélépipède. Cette

fraction dont l'unité est le  $m^{-2}$  est considérée comme la densité de dislocations mobiles. Si on rapporte le cisaillement à la durée de déplacement, on obtient :

$$\dot{\gamma} = \rho_m b \bar{v}, \quad (165)$$

où  $\bar{v}$  est la vitesse de la dislocation.

Cette expression est connue sous le nom de relation d'Orowan . Elle a été proposée pour la première fois en 1940 [76].

#### *Les différentes structures métalliques*

Dans ce paragraphe, on détaille les différentes particularités des structures métalliques usuelles des métaux (cubique centrée, cubique à faces centrées, hexagonale) et les propriétés géométriques des systèmes de glissement.

#### Structures cubiques à faces centrées (cfc)

Les métaux courants qui se solidifient selon cette structure sont entre autres : le cuivre (Cu), l'aluminium (Al), l'argent (Ag), l'or (Au) et le nickel (Ni). La représentation d'une structure cubique à faces centrées est donnée figure 74.

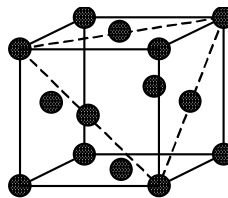


Figure 74 : Structure cubique à faces centrées. L'intersection du plan dense avec le cube est matérialisée par les traits pointillés.

Un monocristal de structure cubique à faces centrées contient quatre plans de glissement de type  $\{111\}$ , avec chacun trois directions denses  $\langle 110 \rangle$ . La notation de Schmid et Boas [83] précise les différentes paires admissibles. Une lettre est attribuée au plan de glissement et un chiffre au vecteur de Burgers. La correspondance est donnée dans le tableau 3.

Normale au plan de glissement	Vecteur de Burgers	Systèmes de glissement potentiels
A $(\bar{1}11)$	1 $[011]$	
B $(111)$	2 $[0\bar{1}1]$	A2 A3 A6
C $(\bar{1}\bar{1}1)$	3 $[101]$	B2 B4 B5
D $(1\bar{1}1)$	4 $[\bar{1}01]$	C1 C3 C5
	5 $[\bar{1}10]$	D1 D4 D6
	6 $[110]$	

Tableau 3 : Convention de Schmid et Boas pour désigner les systèmes de glissement dans la structure cfc.

La loi de Schmid (163) est bien vérifiée pour les métaux à structure cfc. Dans le cas d'une sollicitation uni axiale en traction, le système actif au début de la déformation est déterminé uniquement par la connaissance de l'orientation de l'axe de traction dans le repère attaché à la structure cristallographique. La projection stéréographique est le moyen conventionnel pour repérer les directions dans l'espace. La projection stéréographique liée à la structure cfc, lorsqu'on trace les directions et les plans définis dans le tableau 3 fait apparaître des zones qui s'apparentent à des triangles (voir figure 75).

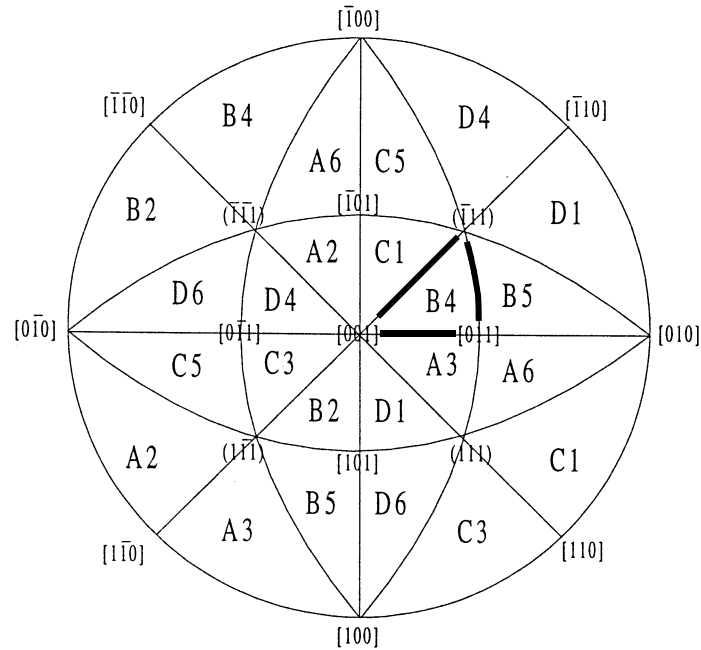


Figure 75 : Projection stéréographique faisant apparaître les symétries de la structure cubique à faces centrées et le triangle standard (en gras). Les systèmes activables en traction uniaxiale sont donnés pour chaque triangle.

D'un point de vue cristallographique, ces triangles sont rigoureusement équivalents entre eux. Le triangle dont les sommets sont  $[001]$ ,  $[011]$  et  $[\bar{1}11]$  est employé pour décrire le comportement général et porte le nom de triangle standard. Lorsqu'on donne le système actif en fonction de la position, on obtient un système actif par zone représentative de la structure. Les côtés ou points communs aux triangles correspondent à des points d'activations multiples. L'orientation de l'axe de traction est représentée par un point appartenant à un triangle. Lorsque l'axe de traction décrit toutes les orientations délimitées par le triangle, un seul système est actif.

#### Structures cubiques centrées (cc)

Les métaux courants qui appartiennent à cette classe de structure sont le fer (Fe), le vanadium (V), le niobium (Nb), le tantale (Ta), le molybdène (Mb) et le tungstène (W). La maille élémentaire est représentée sur la figure 76.

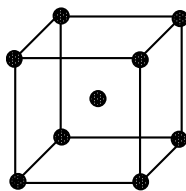


Figure 76 : Structure cubique centrée.

Les directions de glissement correspondent aux directions ayant la plus forte densité atomique de la structure cubique centrée. Ce sont les directions de la famille  $\langle 111 \rangle$ . Le glissement cristallographique se fait uniquement sur la famille de plans  $\{110\}$  ou  $\{112\}$ . Plus rarement on a constaté du glissement dans la famille de plan  $\{123\}$ . Le glissement sur le plan  $\{110\}$  est le plus souvent rencontré. Les systèmes de glissement potentiels d'une structure cubique centrée sont donnés tableau 4.

Normale au plan de glissement	Normale au plan de glissement	Normale au plan de glissement	Vecteur de Burgers	Systèmes de glissement potentiels
1 $(011)$	1' $(\bar{2}1\bar{1})$	1'' $(21\bar{1})$	A $[\bar{1}11]$	
2 $(0\bar{1}1)$	2' $(\bar{2}\bar{1}1)$	2'' $(2\bar{1}1)$	B $[111]$	2A,3A,6A,2'A,3'A,6'A

3 (101)	3' ( $\bar{1}2\bar{1}$ )	3'' ( $\bar{1}\bar{2}\bar{1}$ )	C [ $\bar{1}\bar{1}1$ ]	2B,4B,5B,2''B,4'B,5'B
4 ( $\bar{1}01$ )	4' ( $\bar{1}\bar{2}\bar{1}$ )	4'' ( $\bar{1}\bar{2}\bar{1}$ )	D [ $1\bar{1}1$ ]	1C, 3C,5C,1'C,3''C,5''C
5 ( $\bar{1}10$ )	5' ( $\bar{1}\bar{1}2$ )	5'' (112)		1D,4D,6D,1''D,4''D,6''D
6 (110)	6' ( $1\bar{1}2$ )	6'' ( $\bar{1}12$ )		

Tableau 4 : Notation de Schmid et Boas étendue pour désigner les systèmes de glissement dans la structure cubique centrée.

Il existe une particularité pour les dislocations de type vis dans le cas des structures cubiques centrées. Elles ont une structure de cœur tridimensionnelle. Le cœur de la dislocation est dissocié en dislocations partielles sur 3 plans de type {112} (figure 77). Cette dissociation rend plus difficile le mouvement de la dislocation. Pour se mouvoir, il faut qu'elles deviennent glissiles par constriction dans leur plan de glissement. Cette nature asymétrique du cœur de la dislocation rend son activation sensible aux contraintes de cisaillement en dehors de son plan de glissement.

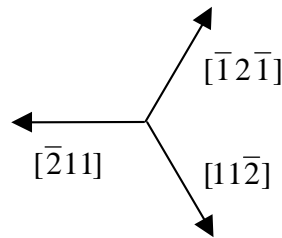


Figure 77 : Dissociation du cœur de la dislocation vis dans la structure cubique centrée.

Dans le cas d'une sollicitation en traction uniaxiale, on détermine le premier système actif. On suppose que chaque système a une cission initiale identique. Chaque triangle représentatif est alors partagé en trois sous domaines d'activités différents (figure 78). Dans l'absolu, l'étendue des différents domaines est conditionné par le rapport entre les différentes cissions critiques de chaque système.

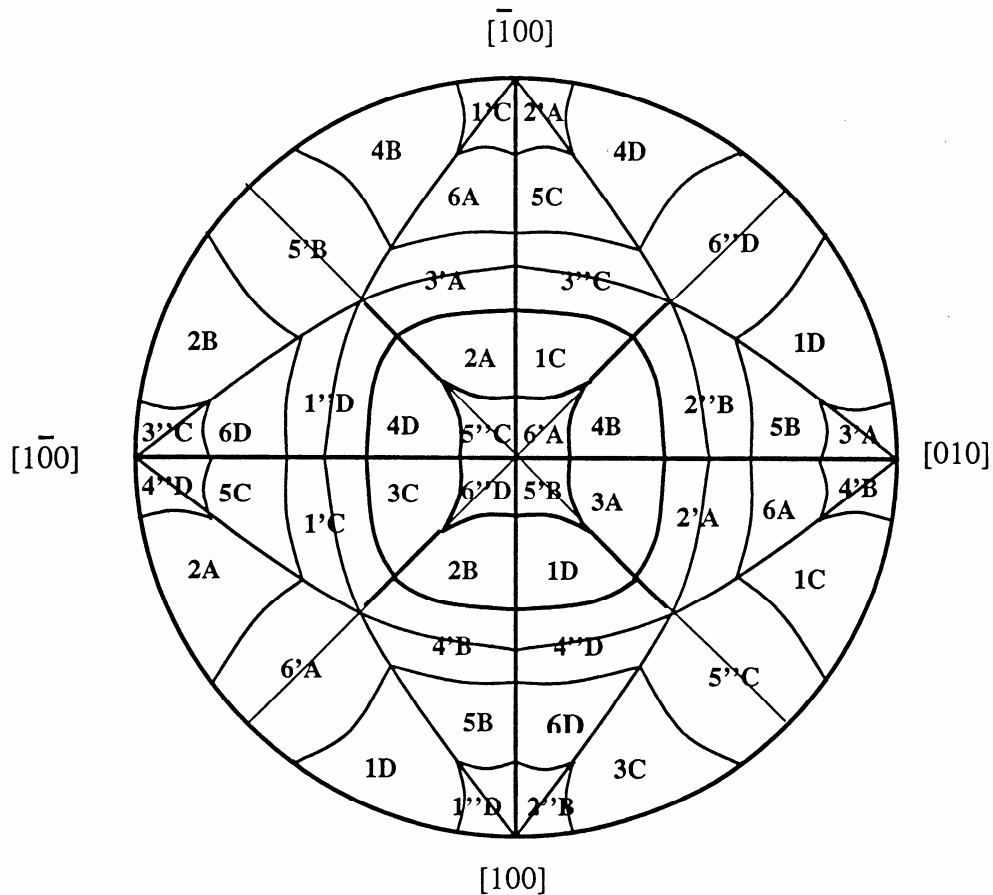


Figure 78 : Projection stéréographique faisant apparaître les systèmes activables en traction uniaxiale pour la structure cubique centrée. Les cisssions critiques sont supposées identiques sur chaque système.

#### Structures hexagonales

Les métaux courants appartenant à cette classe de structure sont : le magnésium (Mg), le Béryllium (Be), le zirconium (Zr), le cadmium (Cd) et le titane (Ti).

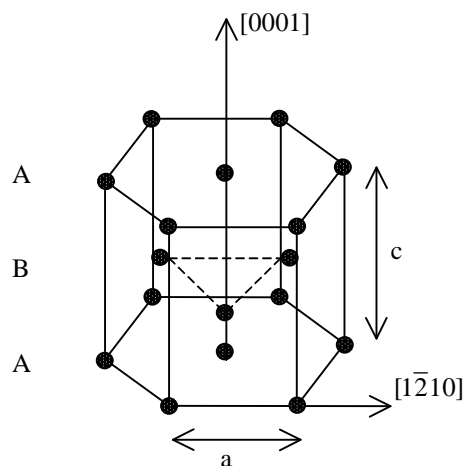


Figure 79 : Représentation de la maille hexagonale. Le plan dense est le plan de base.

La structure hexagonale (figure 79) est un empilement compact de plans denses suivant la séquence A B A B. Sa compacité s'évalue par la valeur du rapport  $c/a$ . Dans le cas idéal, la compacité est de  $\sqrt{8}/3 = 1,633$ . Elle varie dans la fourchette suivante : 1,568 pour le béryllium à 1,886 pour le cadmium (tableau 5).

Matériau	c/a	Glissement principal
Béryllium	1,568	Basal
Hafnium	1,581	Prismatique
Titane	1,588	Prismatique
Zirconium	1,593	Prismatique
Cobalt	1,624	Basal
Magnésium	1,624	Basal
Zinc	1,856	Basal
Cadmium	1,886	Basal

Tableau 5 : Valeurs des rapports c/a et mode de déformation dominant en fonction du métal hexagonal.

Les conventions cristallographiques retenues sont les indices de Miller Bravais définis dans le repère hexagonal à 4 axes [2110], [1210], [1120] et [0001]. En revanche, lorsqu'on est amené à utiliser un repère orthonormé direct, pour des calculs matriciels ou la définition des angles d'Euler, on utilisera les directions à 90° [1010], [1210] et [0001].

Chaque métal de structure hexagonale présente un glissement facile, appelé encore principal (celui dont la cission critique est la plus faible), qui est soit le glissement basal, soit le glissement prismatique. Dans tous les cas, la direction associée est déterminée par les dislocations de vecteur de Burgers  $\langle a \rangle$ . On rencontre également plusieurs autres systèmes de glissement dits secondaires, de vecteurs de Burgers  $\langle a \rangle$  et  $\langle c + a \rangle$ . Ces systèmes sont donnés tableau 6.

Plan de glissement	Vecteur de Burgers	Systèmes de glissement potentiels
(0001) Basal B	$\langle \bar{1}210 \rangle \langle a \rangle$	B $\langle a \rangle$ 3 systèmes
$\{10\bar{1}0\}$ prismatique P	$\langle \bar{1}213 \rangle \langle c+a \rangle$	P $\langle a \rangle$ 3 systèmes
$\{1011\}$ Pyramidal $\pi_1$		$\pi_1 \langle a \rangle$ 6 systèmes
$\{10\bar{1}1\}$ Pyramidal $\pi_2$		$\pi_2 \langle c+a \rangle$ 12 systèmes
$\{11\bar{2}2\}$ Pyramidal $\pi_3$		$\pi_3 \langle c+a \rangle$ 6 systèmes

Tableau 6 : Systèmes de glissement dans la structure hexagonale.

#### Les différents mécanismes

Différents mécanismes opèrent avec des degrés divers d'importance lors de la déformation plastique. La prépondérance d'un mécanisme est contrôlée par le type de structure, les conditions expérimentales (température) et le taux de déformation atteint. Il apparaît important de bien connaître tous les mécanismes et leur rôle lorsqu'on souhaite construire un modèle cristallin de la plasticité. L'objet de ce paragraphe est donc de présenter tous les mécanismes qui sont susceptibles de se manifester lors de la déformation.

#### Production

En 1950, Frank et Read [35] ont déterminé le mécanisme de production des dislocations qui opère de façon prépondérante dans les structures de type cubiques à faces centrées. Ce mécanisme est à l'origine de la multiplication des dislocations dans un cristal qui se déforme plastiquement.



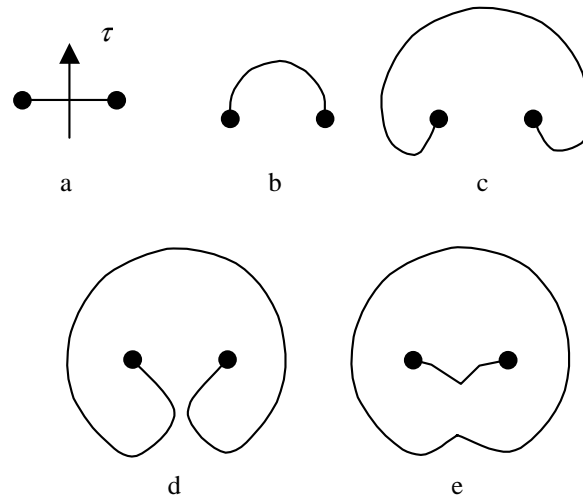


Figure 80 : Etapes successives pour la formation d'une boucle de dislocation à partir d'un segment ancré à ses extrémités et soumis à une contrainte (Mécanisme de Frank Read).

La figure 80 illustre le mécanisme. Un segment de dislocation ancré (a) à ses deux extrémités et soumis à une contrainte résolue  $\tau$  a tendance à s'allonger et se courber. Plus la contrainte est importante et plus le segment a tendance à prendre une forme de 1/2 cercle (b). Les deux extrémités du segment qui se mettent en vis à vis sont de signes opposés (c) et (d). Une augmentation supplémentaire de contrainte entraîne l'annihilation des portions de segments en présence (e). On obtient d'une part, une boucle autonome de dislocation qui va continuer à se dilater et d'autre part un segment, similaire au segment initial, potentiellement apte à fournir une nouvelle boucle de dislocation.

A partir de ces considérations, on définit arbitrairement un signe associé au segment de dislocation relativement au sens de la contrainte résolue. Le segment qui se déplace dans le sens de la sollicitation a le signe + alors que le segment qui se déplace dans le sens opposé à la sollicitation est affecté du signe - (figure 81).

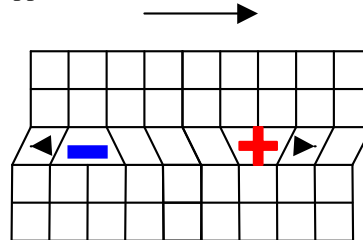


Figure 81 : Définition du signe d'un segment de dislocation en fonction de son sens de déplacement.

La forme circulaire que prend le segment de dislocation sous l'action de la contrainte est expliquée par des raisons de minimisation d'énergie de la ligne de dislocation. On démontre alors que le mécanisme de production Frank-Read est activé si la contrainte de cisaillement appliquée sur le segment de dislocation est inversement proportionnelle au rayon de courbure  $R$  de la dislocation :

$$\tau \approx \frac{\alpha \mu b}{R}. \quad (166)$$

La longueur du vecteur de Burgers est  $b$ , le module de cisaillement du matériau est  $\mu$ .  $\alpha$  est un coefficient de proportionnalité.

Un monocristal est rarement parfait. La structure de dislocations existant sur les différents systèmes prend une forme polygonale pour minimiser l'énergie élastique. Ce réseau de dislocations est appelé réseau de Frank (figure 82). Les points d'ancrage des dislocations sont réalisés aux intersections des lignes de dislocations appartenant à différents systèmes.

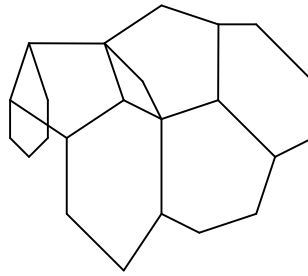


Figure 82 : Schématisation d'un réseau de Frank dans un monocristal non déformé.

On lie donc la cisssion seuil sur un système à la taille caractéristique  $R_f$  de ce réseau qui définit la distance moyenne entre les points d'ancrage en utilisant la relation de proportionnalité définie par l'équation (166) :

$$\tau_\mu = \frac{\alpha \mu b}{R_f} . \quad (167)$$

On estime en général que l'espacement entre les points d'ancrage est inversement proportionnel à la racine carré de la densité de dislocations  $\rho$  . On obtient alors une estimation de la contrainte seuil pour un système :

$$\tau_\mu = \alpha \mu b \sqrt{\rho} . \quad (168)$$

Ce mécanisme s'applique particulièrement bien pour les structures de type cfc. Par exemple, pour le cuivre la relation ci-dessus a été retrouvée avec  $\alpha=0,3$ .

#### Frottement sur le réseau

La dislocation qui progresse dans le réseau cristallin est successivement en interaction forte ou faible avec ses atomes voisins. Ces forces atomiques sont reconnues sous le nom de "forces de Peierls Nabarro" [69] [77]. Cette force est apparentée à une friction de réseau qui varie périodiquement avec une longueur d'onde donnée par l'espace entre les plans atomiques. On démontre que la force de friction est d'autant plus faible que :

- le plan de glissement est dense
- le cœur de la dislocation est étendu dans le plan de glissement

La friction de réseau contrôle davantage les dislocations vis qui sont, en général, plus dissociées que les dislocations coins. Le mécanisme de progression des dislocations dans les matériaux à haut niveau de forces de Peierls est décrit de la façon suivante (voir également [79] par exemple).

Au début de la déformation les dislocations coins progressent alors que les dislocations vis restent bloquées dans les zones d'interaction forte (voir figure 83). Ce stade préalable est appelé pré-plastique en raison de la très faible déformation plastique générée.

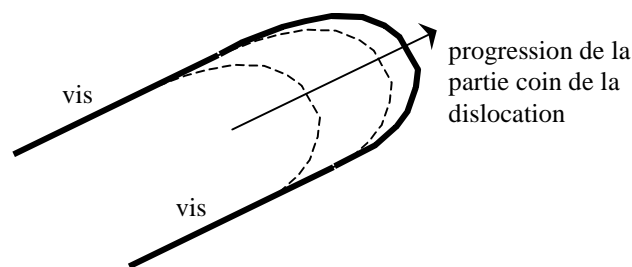


Figure 83 : Progression d'une dislocation dans un matériau à forte friction de réseau en stade pré-plastique. Les segments vis sont bloqués.

Le blocage rapide des dislocations coins entraîne d'une part l'augmentation de la contrainte appliquée, d'autre part, l'implication des dislocations vis dans la déformation à travers un mécanisme spécifique de double décrochement.

La progression de la vis est décrite par le modèle simple suivant. On présente son déplacement par la progression de double décrochement à caractère coin ou mixte qui font passer la vis d'une position stable (liaison forte avec le réseau) à une autre position stable (voir figure 84). Ce mécanisme s'apparente à la technique qu'on utilise lorsqu'on extrait un pneu d'une jante à l'aide de deux démonte-pneus. Pour les basses températures, la friction de

réseau est un mécanisme prépondérant qui contrôle l'écoulement plastique pour les matériaux à structure cubique centrée.

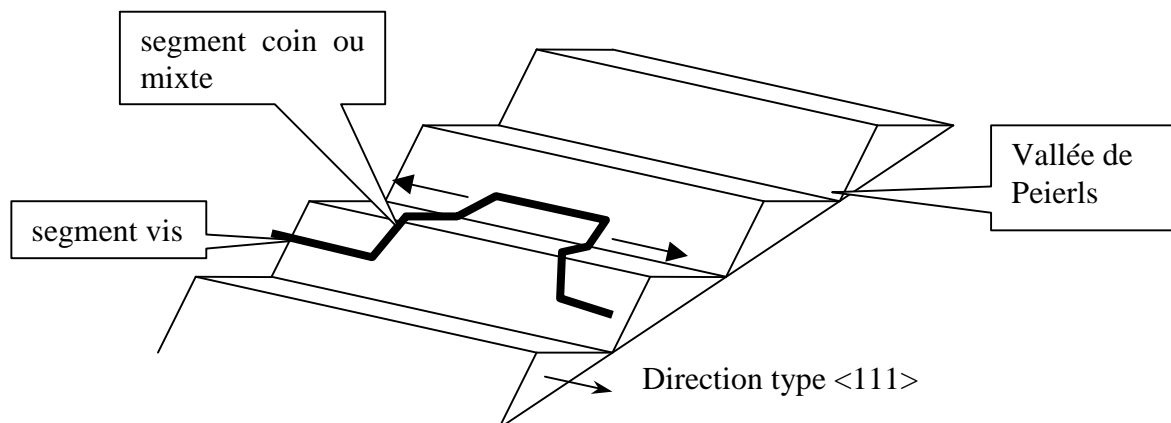


Figure 84 : Progression d'une dislocation vis par création de double décrochement en stade plastique.

#### Annihilation

Deux dislocations coins qui glissent sur un même plan avec des signes opposés s'attirent. De plus lorsque les deux dislocations sont en vis-à-vis, les demi-plans supplémentaires vont coïncider pour donner un plan complet : la ligne de dislocation disparaît. Ce mécanisme est appelé annihilation. Il peut se produire même lorsque les plans de glissement sont séparés par quelques distances atomiques (figure 85). La distance de séparation maximale des plans dépend de l'agitation thermique des atomes et donc de la température.

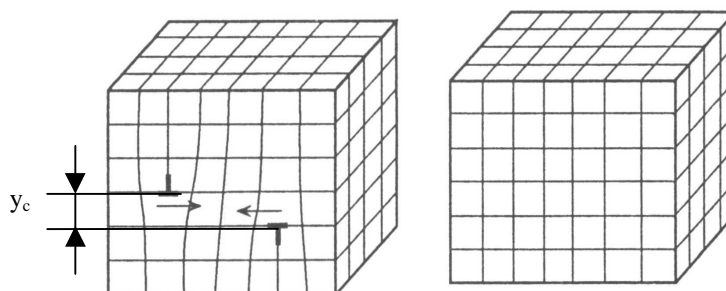


Figure 85 : Mécanisme d'annihilation.

#### Formation d'une jonction

Lorsqu'une dislocation progresse, elle rencontre des lignes de dislocation d'autres systèmes qui percent son plan de glissement. Ces dislocations sont qualifiées de "forêt" relativement au système actif (figure 86).

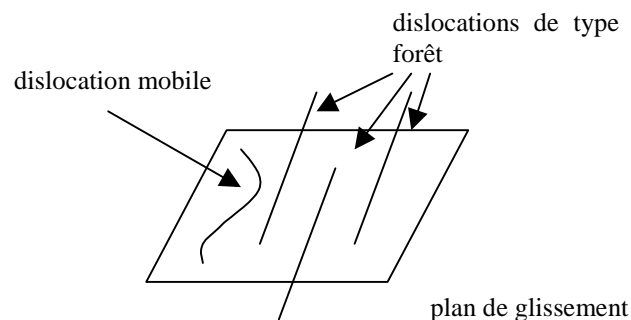


Figure 86 : Définition de la notion de dislocation forêt relativement à une dislocation mobile.

Lorsque deux dislocations désignées par a et b de vecteurs de Burgers  $\mathbf{b}_a$  et  $\mathbf{b}_b$  se rencontrent, il est possible qu'une jonction se forme. Le vecteur résultant de cette combinaison est la somme des deux vecteurs initiaux. L'énergie élastique de la ligne de dislocation est proportionnelle au carré du module du vecteur de Burgers. Ainsi, la formation de jonction (figure 87) est possible si l'énergie de la combinaison est inférieure à l'énergie initiale des deux dislocations séparées :

$$b_a^2 + b_b^2 > (\mathbf{b}_a + \mathbf{b}_b)^2 \Rightarrow \mathbf{b}_a \cdot \mathbf{b}_b < 0. \quad (169)$$

Dans le cas où  $\mathbf{b}_a \cdot \mathbf{b}_b > 0$ , les deux dislocations ne s'assemblent pas. Les interactions entre dislocations entravent leur mouvement et contribuent à durcir le cristal soumis à une déformation plastique.

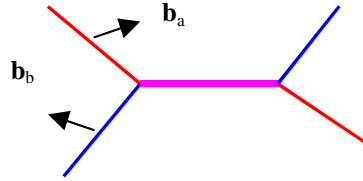


Figure 87 : Formation d'une jonction.

#### Dissociation des dislocations

Quand deux dislocations de vecteurs de Burgers différents se rencontrent, elles peuvent se combiner pour former une jonction de vecteur de Burgers la somme des deux précédents. Réciproquement, il est envisageable qu'une dislocation de vecteur de Burgers  $\mathbf{b}$  puisse se dissocier en deux partielles de vecteur de Burgers  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  pour minimiser son énergie de cœur (figure 88).

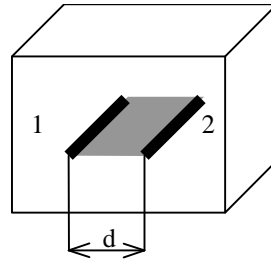


Figure 88 : Dislocation dissociée en deux partielles 1 et 2

On a donc la même relation entre les vecteurs de Burgers que pour l'interaction de deux dislocations (169) :

$$b^2 > b_1^2 + b_2^2, \quad (170)$$

Ce bilan énergétique donné en première approximation nécessite d'être précisé car il ne tient pas compte ni de l'énergie d'interaction  $W_{int12}$  ni de l'énergie de faute d'empilement du réseau  $W_{emp}$  générée par suite de la dissociation. Toutes les énergies mentionnées dans ce paragraphe sont définies par unité de longueur. L'énergie totale  $W_{tot}$  de deux partielles dissociées d'énergies individuelles  $W_1$  et  $W_2$  est donc :

$$W_{tot} = W_1 + W_2 + W_{int12} + W_{emp}. \quad (171)$$

On appelle  $\omega_{emp}$  l'énergie par unité de surface associée au défaut d'empilement. Si  $d$  est la largeur de la bande associée, l'énergie à fournir pour fabriquer le défaut est :

$$W_{emp} = \omega_{emp} * d. \quad (172)$$

A l'équilibre, l'énergie totale est minimale. La largeur de bande  $d_{stable}$  de la dissociation correspond à une énergie totale minimale. Pour la configuration d'équilibre, la dérivée de l'énergie totale équation (171), dans laquelle l'expression de l'énergie de faute d'empilement équation (172) est reportée, doit donc être nulle. Les énergies individuelles des partielles ne dépendent pas de la largeur du défaut, on obtient alors :

$$\left. \frac{\partial W_{int12}}{\partial d} \right|_{d=d_{stable}} = -\omega_{emp} \cdot \quad (173)$$

Cette équation se traduit en concepts simples. Plus l'énergie de faute d'empilement est élevée (c'est à dire moins le matériau accepte de désordre dans l'empilement atomique), moins la dissociation est importante. Les fautes d'empilement sont différentes en fonction des matériaux tableau 7.

Matériau	Aluminium	Cuivre	Argent
Energie de faute en mJ/m <sup>2</sup>	135	45	20

Tableau 7 : Energie moyenne de faute d'empilement pour différents matériaux

Pour le fer, la dissociation de la dislocation vis a déjà été évoqué antérieurement.

#### Glissement dévié

Les dislocations glissent de façon préférentielle dans les plans les plus denses. Le problème du choix du plan de glissement est posé lorsque le vecteur de Burgers est commun à plusieurs plans de glissement. La partie vis d'une dislocation (colinéaire à ce vecteur) peut changer de plan. On appelle cela le mécanisme de glissement dévié. En raison de ce mécanisme, les dislocations vis vont se déplacer plus facilement en changeant de plan pour éviter les obstacles.

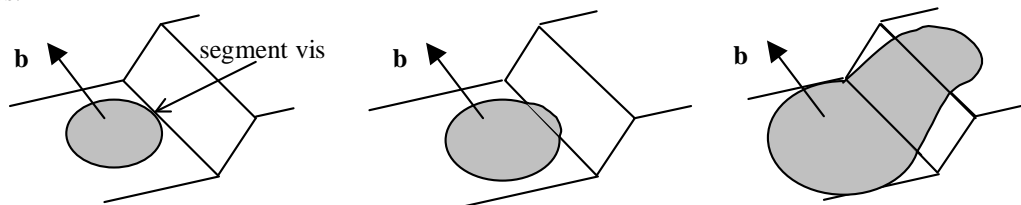


Figure 89 : Glissement dévié d'une dislocation vis.

Le glissement dévié est contrarié par la dissociation de la dislocation en partielles dans le plan de glissement initial. Sauf si les partielles sont parallèles au vecteur de Burgers initial, il faut alors recombinaison des deux partielles pour dévier puis les redissocier dans le nouveau plan de glissement. Ce processus de recombinaison-dissociation sur des partielles est nettement sensible à la température. Le glissement dévié est éligible pour être un mécanisme thermiquement activé.

#### Classement des différents mécanismes

Certains mécanismes de franchissement liés à la mobilité des dislocations sont affectés par les changements de température [29]. Tous les atomes d'une ligne de dislocation vibrent en permanence avec une amplitude qui s'accroît si la température augmente. La mise en œuvre du glissement dévié est par exemple facilitée par cette vibration. La formation de jonction attractive y est, en revanche, complètement insensible. On qualifie de "thermiquement activé" un processus dont le déclenchement présente une dépendance à la température. A contrario, il est déclaré athermique. Les mécanismes sont donc rangés dans deux catégories en fonction de leur dépendance avec la température : thermiquement activés ou athermiques (tableau 8).

Progression dans un réseau cristallin contrôlée par les forces de Peierls	Thermiquement activée
Création d'une interaction répulsive	Athermique
Création d'une jonction attractive	Athermique
Formation de cran	Thermiquement activée
Interaction avec une dislocation colinéaire	Athermique
Formation de dipôle coin	Thermiquement activée
Glissement dévié	Thermiquement activé
Création de boucle selon Frank-Read	Athermique

Tableau 8 : Tableau des mécanismes et de leur dépendance à la température.

On a une manifestation de la dépendance thermique du mécanisme en faisant varier la température et en

regardant les effets qui en découlent. Par exemple, la contrainte d'écoulement initiale, dont on pense qu'elle est liée au mécanisme de Peierls notamment dans les structures cubiques centrées, est décomposée en une partie athermique  $\tau_\mu$  et une partie sensible à la température  $\tau^*$ .

Cette décomposition est justifiée par le graphe expérimental (figure 90), où la valeur de la contrainte initiale à appliquer sur un cristal non déformé est donnée en fonction de la température.

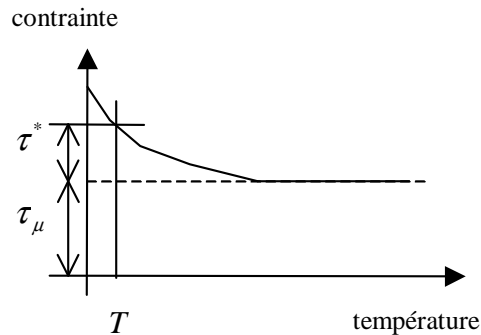


Figure 90 : Evolution de la contrainte initiale sur une série d'échantillons identiques non déformés à différentes températures.

Cette courbe révèle un plateau athermique qui définit la contrainte athermique  $\tau_\mu$ . La sur-contrainte  $\tau^*$  nécessaire qui apparaît lorsque la température diminue est provoquée par la diminution de la température. Les matériaux de différentes structures n'ont pas la même sensibilité à la température comme l'illustre la figure 91 donnée pour trois matériaux représentatifs de trois structures.

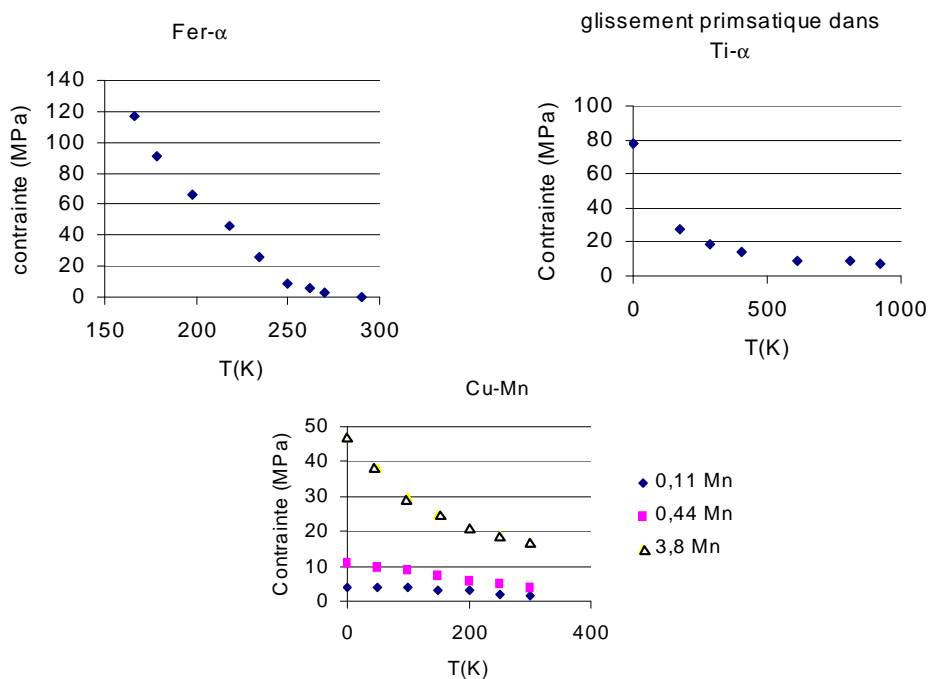


Figure 91 : Evolution de la contrainte initiale en fonction de la température pour le Fer- $\alpha$  [4], le glissement prismatique dans le Ti- $\alpha$  [19] et l'alliage Cu-Mn [94].

Ceci traduit donc une beaucoup plus faible incidence des forces Peierls dans les matériaux à structure cubique à faces centrées.

### Le maillage

La génération de macles est une autre possibilité pour générer du glissement plastique. Ce mode de déformation est nettement moins fréquent que le glissement des dislocations. On le détecte toutefois assez fréquemment dans

les structures hexagonales. Le maclage correspond à un basculement d'une partie du cristal par rapport à l'autre (figure 92).

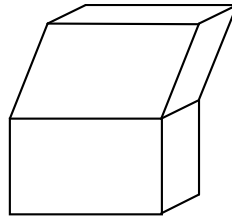


Figure 92 : Représentation d'un cristal maclé.

Il apparaît lorsque les systèmes de dislocations sont en nombre insuffisant pour accommoder la déformation. C'est pourquoi, il est plutôt présent dans les matériaux à structure hexagonale mais on le détecte aussi dans les matériaux cubiques centrés ou cubiques à faces centrées à basses températures. D'un point de vue microscopique, le maclage s'explique par le glissement d'une dislocation partielle dans des plans de glissement parallèles, comme il est montré sur la figure 93.

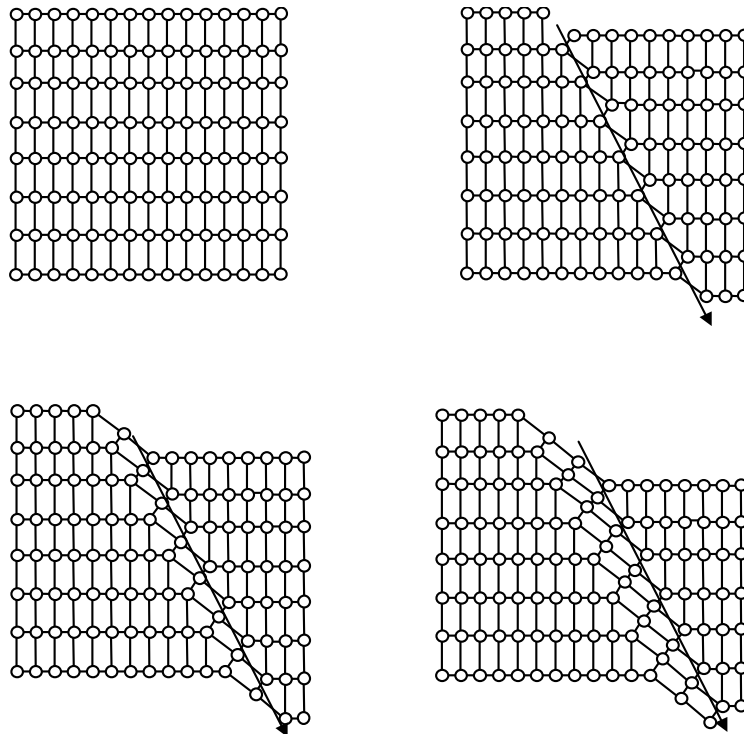


Figure 93 : Décomposition du maclage par passages successifs d'une dislocation partielle.

On obtient après passages successifs de la dislocation partielle, la même structure cristallographique "tournée", qui définit la zone maclée.

En ce qui concerne le point de vue du mécanicien du solide, comme pour les dislocations, on définit un vecteur unitaire  $\mathbf{n}_{ma}^{(s)}$  normal au plan de macle et un vecteur unitaire  $\mathbf{b}_{ma}^{(s)}$  colinéaire à la direction du maclage (figure 94).

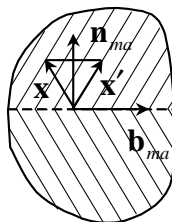


Figure 94 : Maclage, décalage du réseau après maclage.

Les caractéristiques le plus souvent constatées sont données dans le tableau 9.

Structure	Plan de macle	Direction du cisaillement
cubique à face centrée	$\{111\}$	$1/6\langle 112 \rangle$
cubique centré	$\{112\}$	$1/6\langle 111 \rangle$
hexagonal	$\{10\bar{1}2\}$	$1/12\langle 10\bar{1}1 \rangle$

Tableau 9 : Systèmes cristallographiques associés au maclage dans les différentes structures.

### Phénoménologie expérimentale des monocristaux

Dans les paragraphes précédents, on décrit les différents mécanismes élémentaires à l'origine de la plasticité cristalline. Le paragraphe suivant est consacré aux manifestations phénoménologiques de la plasticité par glissement de dislocations impliquant alors un ou plusieurs mécanismes élémentaires de façon collective. La traction sur les monocristaux a été largement utilisée [12] pour étudier la plasticité des métaux. Malgré son apparente simplicité, c'est un essai réellement complexe qui implique différents mécanismes au fur et à mesure que la déformation progresse. C'est cet essai qui est analysé principalement dans le cas des métaux à structure cubique centrée et cubique à faces centrées.

#### Phénoménologie expérimentale des structures cfc

Pour les matériaux à structure cubique à faces centrées, l'analyse de cet essai montre que pour une orientation quelconque à l'intérieur du triangle standard, on active d'abord un premier système (figure 95). L'activité de ce système entraîne alors une rotation cristalline qui tend à positionner l'axe de traction en position symétrique et provoque l'activation d'un système secondaire. Cette position est le plus souvent stable et est conservée jusqu'à la fin de l'essai.

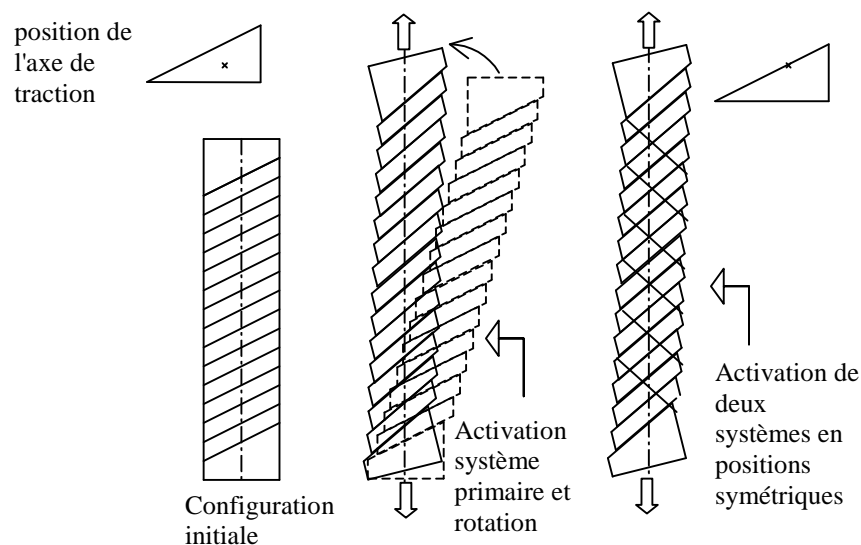


Figure 95 : Effet de l'activation d'un système lors d'un essai de traction sur éprouvette monocristalline en configuration de glissement simple initial.

Comme pour l'essai de traction sur éprouvette polycristalline, on effectue une transformation des grandeurs mécaniques force et déplacement pour obtenir des relations plus intrinsèques. Pour les monocristaux, on calcule les grandeurs de contrainte résolue sur le premier système en fonction de son glissement accumulé  $(\tau^p, \gamma^p)$ . Ceci nécessite dans un premier temps une première transformation analytique quand la déformation plastique est accommodée par un seul système, puis l'utilisation d'une seconde formule quand le glissement double se déclenche ([16] ou [25]). Le choix du point expérimental où on considère que le glissement double se produit a une incidence importante sur la réponse calculée [11] et introduit des variations de réponses importantes. Dans la plupart des articles, le mode de calcul des grandeurs  $(\tau^p, \gamma^p)$  n'est pas précisé dans les articles rapportant des résultats expérimentaux. Les données originales telles que la géométrie de l'éprouvette et la courbe force déplacement ne sont pas non plus fournies. Ceci laisse toujours planer un doute sur l'allure véritable de ces courbes et sur l'interprétation donnée par les auteurs. Néanmoins, un grand nombre de résultats est fondé sur l'allure générale de ces courbes. Les grandes caractéristiques de ces courbes  $(\tau^p, \gamma^p)$  qui sont au moins



qualitativement valables sont rappelées et analysées. Les courbes  $(\tau^p, \gamma^p)$  sont différentes en fonction de la structure du matériau considéré. La structure qui donne lieu à des courbes les plus typiques est la structure cfc.

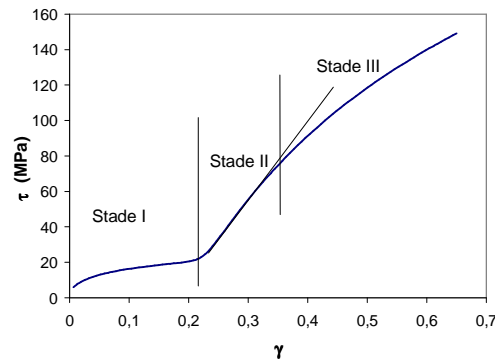


Figure 96 : Courbe à trois stades dans le cas d'une traction simple sur monocristal de structure cfc orienté pour un glissement simple initial.

Dans la littérature, on s'accorde généralement pour considérer trois stades caractéristiques pour la courbe de monocristaux cfc orientés initialement pour le glissement simple (figure 96).

#### Stade I

L'écoulement sur le système le plus sollicité (ou système primaire) se déclenche pour une contrainte faible. Cette contrainte correspond à la contrainte seuil qu'il faut appliquer à des segments de dislocations ancrés sur une population de dislocations forêt. Si les dislocations sont équidistantes, la contrainte seuil vaut (voir page 79) :

$$\tau^{(p)} = \mu b \sqrt{\rho} . \quad (174)$$

La friction de réseau est faible. La production de dislocations mobiles se fait conformément au mécanisme de Frank-Read. On obtient alors une augmentation du nombre de dislocations stockées dans le matériau lorsque les dislocations mobiles s'arrêtent. Une stabilisation de la densité est observable lorsque celle-ci est suffisamment importante pour favoriser l'annihilation des dislocations de signes opposés dans des plans voisins, par glissement dévié. Le durcissement expérimentalement constaté est faible en stade I :  $d\tau/d\gamma < 10^{-3} \mu$ .

#### Stade II

L'activation d'un seul système positionne l'axe de traction sur une position de symétrie relativement à la structure cristalline (figure 97). Consécutivement un second système (système secondaire), non coplanaire avec le premier, est activé. L'activation simultanée de deux systèmes dans deux plans différents multiplie les intersections et les points d'ancrage. La distance libre des segments diminue et le mécanisme de Frank-Read requiert un niveau de contrainte de plus en plus élevé pour être activé. La multiplication des dislocations est également plus importante et provoque de plus en plus d'interactions (jonctions, barrières de Lomer Cotrell), non activables thermiquement. Ces barrières provoquent le blocage des dislocations mobiles et pénalisant l'activation des sources. Cette situation entraîne un durcissement important de l'ordre de  $10^{-2} \mu$ . Les densités du système primaire et secondaire tendent à devenir égales [11,67].

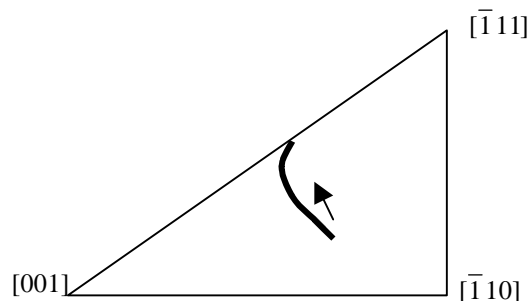


Figure 97 : Evolution de la position de l'axe de traction à l'intérieur du triangle standard au cours de l'essai de traction sur monocristal.

#### Stade III

La contrainte sur les dislocations bloquées devient importante et favorise le glissement dévié. L'annihilation de dislocations est alors facilitée. La densité de dislocations se stabilise. L'écoulement tend à se faire avec un

écrouissage nul. Par conséquent, on assiste à une chute progressive de l'écrouissage au cours du stade III.

### *Phénoménologie expérimentale des structures cc*

On distingue deux cas typiques de réponse pour les matériaux cc en traction. Il existe d'une part un comportement à basse température, où on décèle l'importance prépondérante des effets des vallées de Peierls et d'autre part une zone, à partir de la température dite "athermique" où le comportement devient plus similaire à celui des métaux à structure cfc. Nous nous attacherons à décrire plus spécifiquement le comportement des cubiques centrés à basse température. A température élevée, le comportement devient similaire à celui des structures cubiques à faces centrées.

A basses températures, la courbe contrainte-déformation ne présente pas de stades caractéristiques même si les monocristaux sont initialement orientés pour un glissement simple comme on le constate sur la courbe schématique donnée figure 98. On introduit une limite apparente élastique qui fait la frontière entre un stade préplastique (ou microplastique) du domaine plastique traditionnel (ou macroplastique).

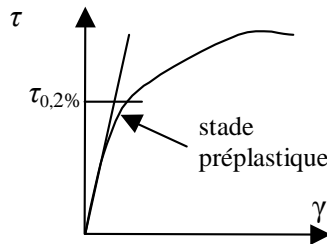


Figure 98 : Courbe schématique de la réponse d'un monocristal de structure cc en dessous de la température athermique.

Les dislocations vis minimisent leur énergie de cœur en se plaçant dans les vallées de Peierls parallèles aux directions  $\langle 111 \rangle$ . Pour qu'une dislocation vis se déplace, il faut qu'elle franchisse la barrière thermiquement franchissable de la vallée de Peierls, ce qui requiert une contrainte importante. Le stade préplastique correspond alors à l'activation des segments de type coin qui ne sont pas sensibles à l'effet des forces Peierls. Ce faisant, ils génèrent une déformation relativement faible et laissent derrière eux de longs segments vis (figure 83). Les sources potentielles s'épuisent alors très rapidement et il s'ensuit consécutivement une élévation rapide du niveau de contrainte si le taux de déformation reste constant.

Sous l'effet de l'élévation de la contrainte, la probabilité de franchissement des vallées de Peierls augmente. Les vis commencent alors à glisser selon le mécanisme de la figure 84. Le déblocage progressif de toutes les vis fournit à nouveau des dislocations mobiles génératrices de déformation entraînant un moindre accroissement de la contrainte. La mobilité des vis est contrôlée par la germination de doubles décrochements. La vitesse des dislocations vis contrôlant la déformation, est donc proportionnelle aux nombres de sites de germination sur la ligne de dislocation.

### **Conclusion**

Le domaine de la plasticité monocristalline a fait l'objet d'études approfondies dont les paragraphes précédents donnent un aperçu. Divers mécanismes élémentaires sont à l'origine du comportement macroscopique des monocristaux. Le comportement global qui ressort à travers des essais mécaniques classiques ne peut s'interpréter sans faire référence aux fondements de la plasticité. La modélisation de comportement de ces monocristaux ne peut donc être phénoménologique. La modélisation des mécanismes physiques se présente la plupart du temps sous forme de modélisation unidimensionnelle limitée à l'interprétation du phénomène observé. La généralisation de tels modèles est l'étape nécessaire pour obtenir une description générale exploitable dans le cas d'un problème aux limites quelconque. Les nombreux résultats de la littérature fournissent le cadre de référence constant auquel doit être confrontée toute modélisation. Toutefois, tous les résultats ne sont pas directement exploitables notamment lorsque les conditions expérimentales ne sont pas précisées. La vérification nécessite alors la mise en place d'expériences au laboratoire.

### **Modélisation de la plasticité du monocristal de structure cfc**

#### **Introduction**

Depuis quelques années déjà, l'activité de recherche sur des modèles généraux au niveau de la plasticité du grain se développe. L'enjeu est de trouver des modèles qui intègrent les différents mécanismes responsables de la plasticité tout en restituant le comportement macroscopique du matériau. Mecking et Estrin [62] proposent dès

1987, un modèle complet de la plasticité connecté à l'évolution de la microstructure. Le seul paramètre de la description est alors la densité totale de dislocations stockées à l'intérieur de l'échantillon. Il s'agit là d'un modèle unidimensionnel qui suppose un comportement homogène sur l'ensemble de l'éprouvette en traction : tous les grains du matériau doivent être en glissement multiple identique.

Dans cet article on trouve une loi d'écoulement initialement exprimée sous forme de loi d'Arrhénius :

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^0 \exp\left(-\frac{\Delta G}{kT}\right), \quad (175)$$

en raison de la sensibilité de l'écoulement à la température. Ici,  $\dot{\gamma}$  représente la vitesse de déformation macroscopique,  $\Delta G$  est l'enthalpie libre d'activation. Le facteur scalaire  $\dot{\gamma}^0$  est lié à la densité de dislocation mobile dans le matériau et peut être considéré comme constant. Pour de multiples applications, la loi de l'équation (175) est utilisée sous une forme approchée :

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma} \left(\frac{\tau}{\hat{\tau}}\right)^m, \quad (176)$$

où  $\tau$  est la contrainte appliquée et  $\hat{\tau}$  une contrainte de référence (voir [64]) dont la valeur dépend de la microstructure à travers l'équation :

$$\hat{\tau} = \alpha \mu b \rho^{1/2}. \quad (177)$$

$\mu$  est le module de cisaillement,  $b$  représente la longueur du vecteur de Burgers.  $\alpha$  est un scalaire dont la valeur numérique est environ l'unité. L'évolution de la densité de dislocations, supposée homogène dans l'échantillon est donnée par :

$$\dot{\rho} = \left(K_1 \rho^{1/2} - K_2 \rho\right) \dot{\gamma}, \quad (178)$$

dans le cas de matériaux purs à structures cubiques à faces centrées.  $K_1$  et  $K_2$  sont des paramètres scalaires indépendants de la température et de la vitesses de déformation.

Malgré son caractère unidimensionnel pour un milieu supposé complètement homogène, ce modèle présente une vision de la plasticité connectée à la microstructure. Cette dépendance repose sur l'utilisation d'une unique variable interne : la densité de dislocations.

Ce modèle ne peut pas être utilisé dans le cas général de la plasticité intra granulaire pour lequel, l'évolution de la microstructure est liée à plusieurs systèmes de glissement. Dans cette optique, [5], [21] et [49] utilisent un modèle où la déformation plastique est discrétisée sur les 12 systèmes de glissement de la structure cfc. Le modèle de ces différents auteurs est dans ce sens plus général que celui proposé par Mecking et Estrin mais il est certainement moins physique puisque l'écrouissage sur chacun des systèmes est décrit par une équation phénoménologique.

Ces deux voies de travail s'inscrivent dans un champ disciplinaire très important à l'origine de nombreuses conférences. Ce champ d'activité entre dans le cadre des modélisations multi échelles dans lequel s'insère ce travail de modélisation du comportement élastoviscoplastique des mono/multicristaux métalliques.

Pour les métaux sans précipités à structure cubique à faces centrées (cfc), la plasticité provient essentiellement du mouvements des dislocations. Dans la structure cfc on recense 12 systèmes différents pour accommoder la déformation plastique. Les mécanismes impliquant les dislocations sont sélectionnés puis la modélisation de ces processus conduit à définir les relations générales de la plasticité d'un monocristal.

La modélisation extensive proposée a pour objectif de présenter un modèle cohérent construit en puisant dans la bibliothèque de mécanismes physiques à l'origine de la plasticité. Ce modèle, au final est (doit être) apte à simuler le comportement du matériau sous n'importe quel cas de charge. Plusieurs étapes sont nécessaires à sa construction. La première détaille comment on peut relier l'évolution des densités de dislocations aux taux de déformation, la seconde fait le lien entre taux de déformation et le ratio contrainte appliquée sur contrainte seuil et finalement la contrainte seuil est liée à la densité des dislocations.

#### Lien entre évolutions des densités de dislocations et taux de la déformation

L'objectif de ce travail est l'obtention de la loi d'évolution moyenne des densités de dislocations en fonction des taux de glissement sur chaque système. Une attention particulière est portée aux hypothèses nécessaires à chaque étape du calcul. En effet la relation cherchée est déduite en utilisant les connaissances sur les processus physiques impliquant des mécanismes individuels de dislocations : annihilation, production alors qu'on s'intéresse ici à une densité moyenne de dislocations par système. L'adjectif moyen réfère à un volume

significatif pour la mécanique des milieux continus et implique qu'on puisse déterminer les contraintes et les déformations. La taille de ce volume impose la considération d'un nombre très élevé de dislocations.

#### *Taux de production*

On considère initialement la densité totale de dislocations  $\rho^{(s)}$  sur chaque système de glissement (s). On distingue deux catégories de dislocations : les mobiles et les immobiles. Le déplacement des dislocations mobiles génère la déformation plastique. Elles sont produites à partir de segments de dislocations ancrés à chaque extrémité selon le mécanisme de Frank Read [35]. Les dislocations immobiles sont présentes dans tout métal issu de fabrication industriel. Leur nombre s'accroît au cours de la déformation plastique, puisqu'après avoir été générée et s'être déplacée une dislocation mobile s'arrête et devient immobile. La décomposition se traduit par :

$$\rho^{(s)} = \rho_i^{(s)} + \rho_m^{(s)}. \quad (179)$$

Expérimentalement, on constate que la densité des dislocations mobiles  $\rho_m^{(s)}$  est très inférieure à la densité de dislocations immobiles  $\rho_i^{(s)}$ .

L'évolution respective de chaque densité est liée à trois mécanismes physiques différents (voir paragraphe 0 p.79).

- Le mécanisme de Frank Read [35] est responsable de la multiplication des dislocations.
- Les dislocations d'un système interagissent avec les dislocations d'un autre système selon différents schémas (Franciosi [34]). Ces interactions conduisent à des blocages et à l'arrêt de la dislocation.
- Les dislocations d'un même système s'annihilent [28] lorsqu'elles se croisent à une distance inférieure à un rayon de capture.

L'évolution de la densité totale de dislocation est formulée en fonction des différents taux d'évolution liés à ces mécanismes :

$$\dot{\rho}^{(s)} = \dot{\rho}_i^{(s)} + \dot{\rho}_m^{(s)} = (r_i^{(s)} + r_{ia}^{(s)}) + (r_p^{(s)} - r_{ma}^{(s)} - r_i^{(s)}). \quad (180)$$

Les notations adoptées sont détaillées dans le tableau suivant.

$r_p^{(s)}$	taux de production des dislocations mobiles
$r_{ma}^{(s)}$	taux d'annihilation des dislocations mobiles
$r_i^{(s)}$	taux d'immobilisation des dislocations mobiles, c'est aussi le taux de production des immobiles
$r_{ia}^{(s)}$	taux d'annihilation des immobiles

Tableau 10 : Différents taux de production concourant à l'évolution de la densité totale de dislocations.

#### *Evaluation des différents taux de production*

L'exercice suivant consiste à évaluer les différents taux et à les coupler à la vitesse de déformation. Une considération expérimentale (Mecking et Lücke [63]) simplifie considérablement cette tâche. Si les conditions d'essai (vitesse ou température) ne changent pas brutalement, alors la densité de dislocations mobiles est constante. Cette condition se traduit mathématiquement par :

$$\dot{\rho}_m^{(s)} = 0. \quad (181)$$

L'utilisation de cette hypothèse simplificatrice limite cependant l'utilisation de la loi pour des cas d'essais quasi-statiques mais le report dans l'équation (180) restreint la complexité de calcul de  $\dot{\rho}^{(s)}$  :

$$\dot{\rho}^{(s)} = r_i^{(s)} - r_{ia}^{(s)}. \quad (182)$$

Si on se réfère à Essman et Mughrabi [28], le taux d'annihilation  $r_{ia}^{(s)}$  s'évalue à partir de considérations statistiques. Un segment de dislocation de longueur  $l$  (unité) se déplaçant d'une longueur  $dx$  pendant le temps  $dt$  peut annihiler un segment de signe opposé si tous les deux se croisent dans un volume  $V = l dx 2R$  où  $R$  est le rayon de capture (figure 99).

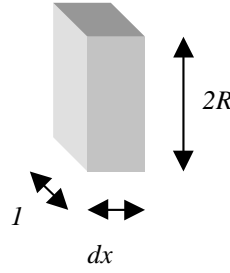


Figure 99 : Volume d'annihilation.

Ce rayon  $R$  dépend à la fois de la température et de la vitesse de déformation. La longueur de segments immobiles dans le volume  $V$  s'obtient par le produit de la densité de dislocations immobiles par le volume considéré. Comme seule une partie de la dislocation est annihilable, un facteur correctif  $\beta (<1)$  est introduit :

$$L_i = \beta dx 2R \rho_i^{(s)}. \quad (183)$$

Le taux d'annihilation moyen s'obtient en multipliant alors cette expression par la densité de mobiles et en divisant par  $dt$ . Une simplification supplémentaire consiste à prendre le rapport  $\frac{dx}{dt}$  comme constant, quel que soit le segment de dislocation mobile, et égal à la vitesse moyenne  $\bar{v}^{(s)}$  des dislocations mobiles :

$$r_{ia}^{(s)} = 2\rho_m^{(s)} \beta R \rho_i^{(s)} \bar{v}^{(s)}. \quad (184)$$

Le taux d'immobilisation des dislocations mobiles est quant à lui calculé en utilisant la notion de libre parcours moyen. Une dislocation mobile parcourt la distance  $\lambda$  avant de s'arrêter. Le taux d'annihilation moyen de ce segment, sur la durée du mouvement, est :

$$r(seg) = \frac{1dx}{\lambda dt} \quad (185)$$

L'extension à l'ensemble des dislocations mobiles est effectuée en considérant la densité moyenne de dislocations mobiles et en supposant que ce résultat reste valable avec les valeurs moyennes de la distance parcourue et de la vitesse des dislocations :

$$r_i^{(s)} = \rho_m^{(s)} \frac{\bar{v}^{(s)}}{\Lambda^{(s)}}. \quad (186)$$

$\Lambda^{(s)}$  est le libre parcours moyen des dislocations mobiles.

#### Evolution de la densité stockée dans le matériau

A ce point du calcul, on constate que les deux taux dépendent de la vitesse de déformation. On utilise la relation (Orowan [76]) qui lie le taux de déformation sur un système  $(s)$ ,  $\dot{\gamma}^{(s)}$  à la vitesse moyenne et la densité de dislocations mobiles  $\rho_m^{(s)}$  sur ce même système :

$$\frac{\dot{\gamma}^{(s)}}{b} = \rho_m^{(s)} \bar{v}^{(s)} \quad (187)$$

En reportant cette relation dans les équations (184) et (186), on obtient les deux termes composant la relation (182) qui devient :

$$\dot{\rho}^{(s)} = \frac{1}{b} \left( \frac{1}{\Lambda^{(s)}} - 2y_c \rho_i^{(s)} \right) \dot{\gamma}^{(s)}, \quad (188)$$

si  $y_c = \beta R$ . Les dislocations mobiles sont stoppées par les segments de dislocations qui percent le plan de glissement. L'espace moyen entre les dislocations est inversement proportionnel à leur densité, si on suppose une répartition uniforme. Le libre parcours moyen est calculé avec la relation suivante :

$$\Lambda^{(s)} = \frac{\sqrt{\sum_{q=1}^N a^{(sq)} \rho^{(q)}}}{K} \quad (189)$$

$K$  est le facteur de proportionnalité entre le libre parcours moyen de la distance entre dislocations forêts (qui percent le plan de glissement d'un système donné). Le terme  $a^{(sq)}$  intègre alors la géométrie de l'interaction entre les dislocations considérées ( $s$ ) et les dislocations forêts ( $q$ ). En reportant cette expression dans la relation (188), et en considérant que la densité de dislocations immobiles est approximativement égale à la densité totale sur le système, on obtient la loi d'évolution

$$\dot{\rho}^{(s)} = \frac{1}{b} \left( \frac{\sqrt{\sum_{q=1}^N a^{(sq)} \rho^{(q)}}}{K} - 2y_c \rho^{(s)} \right) \dot{\gamma}^{(s)} \quad (190)$$

### Conclusion

La transition d'échelle entre un niveau initial qui se situe à l'échelle de la dislocation individuelle et le niveau où on considère le comportement collectif d'une population de dislocations est loin d'être évidente à réaliser. En prenant autant de précautions qu'il est possible, on n'est néanmoins obligé d'introduire des pseudo moyennes arbitraires. Le modèle est limité aux chargements quasi-statiques puisqu'on a considéré la densité de dislocations mobiles constante. Il n'est pas applicable non plus aux matériaux contenant des précipités. Malgré tout, l'évolution des différents systèmes est prise en compte et les différents mécanismes élémentaires ont été intégrés. Les paramètres conservent leur sens physique. Ainsi, par exemple,  $y_c$  reste une distance d'annihilation. Lors de l'identification, on doit s'attendre à ce que la valeur trouvée soit au moins du même ordre de grandeur que la valeur relevée expérimentalement. Le problème est aussi de vérifier cette relation. On verra ultérieurement que la forme de cette relation n'est pas contredite par des simulations dynamiques 3 D du mouvement des dislocations. On cherche en effet à identifier les paramètres moyens avec d'un code qui travaille à l'échelle de la dislocation individuelle. Les valeurs obtenues lors de la simulation pour les paramètres,  $K=37$  et  $y_c = b$ , dans le cas du cuivre sont compatibles avec les valeurs généralement admises pour ce matériau.

### Lien entre la contrainte appliquée résolue et le taux de déformation

L'objectif est de lier la contrainte appliquée sur une population de dislocations à la vitesse moyenne de déformation. L'étude se fait en considérant la dislocation comme un système soumis à différentes forces. L'origine de ces efforts est liée aux différents champs de contrainte auxquels elle est soumise. Un aspect supplémentaire mais essentiel de l'étude repose sur la théorie des mécanismes thermiquement activés : certains de ces champs à courte portée sont franchissables avec l'assistance de la vibration atomique, indépendamment de la valeur de crête du champ de contrainte, mais fonction de la température. Une large partie de ce paragraphe est donc dédiée à l'application de la théorie du mouvement thermiquement activé des dislocations.

### Détermination de l'origine des différentes contraintes

Pour obtenir la loi d'écoulement, on procède en deux temps. On détermine tout d'abord les contraintes à l'intérieur du matériau par des considérations élémentaires sur l'équilibre d'un solide, puis on écrit l'équilibre de la ligne de dislocation. En introduisant la notion de glissement collectif pour déterminer la limite élastique apparente, on obtient finalement la forme de la relation de la loi d'écoulement.

Sous l'action d'efforts extérieurs, un solide est en équilibre. Lorsqu'on "coupe" le matériau, l'équilibre de la partie coupée est conservé si on représente l'effet des forces de cohésion par les contraintes internes. Ainsi l'équilibre de la partie inférieure est obtenu si la moyenne des contraintes internes est égale à la contrainte moyenne appliquée  $\tau_{app}$  due aux efforts extérieurs (figure 100).

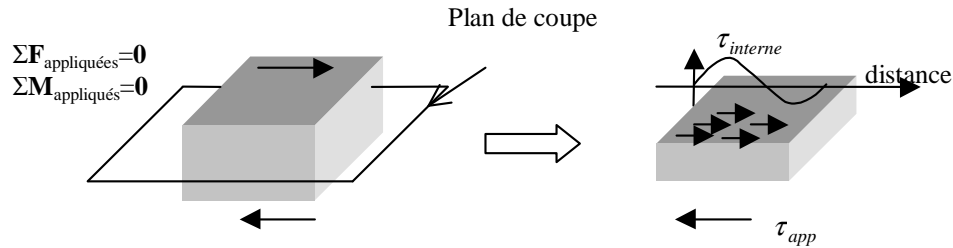


Figure 100 : Equilibre du matériau dans le cas d'un cisaillement sur un échantillon. Les contraintes normales ne sont pas représentées.

Si on suppose que la contrainte appliquée est constante sur la surface de l'échantillon, pour un matériau déjà déformé, on obtient alors la répartition de contrainte le long d'une génératrice proposée figure 101.

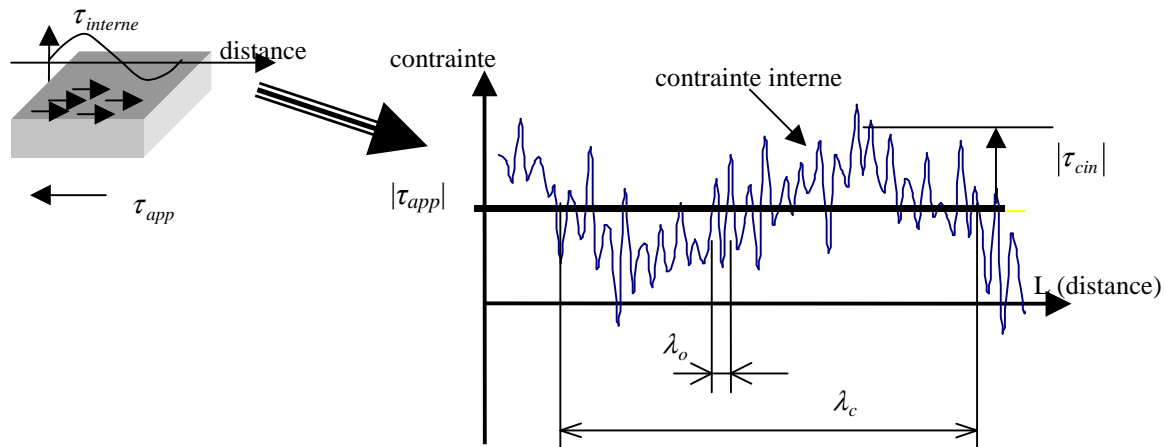


Figure 101 : Contrainte interne de cisaillement sur un plan en fonction de la distance (Représentation unidimensionnelle).

La contrainte interne, qui pourrait être constante et égale à la contrainte appliquée, est perturbée par deux effets cumulatifs de longueurs d'onde différentes. La première perturbation est celle qui possède la longueur d'onde ( $\lambda_c$ ) la plus importante. Cette variation de contrainte trouve son origine dans les murs créés par exemple par agglomération de dislocations. La figure 102 donne la variation de contrainte provoquée par les segments d'une structure de dislocations idéalisée.

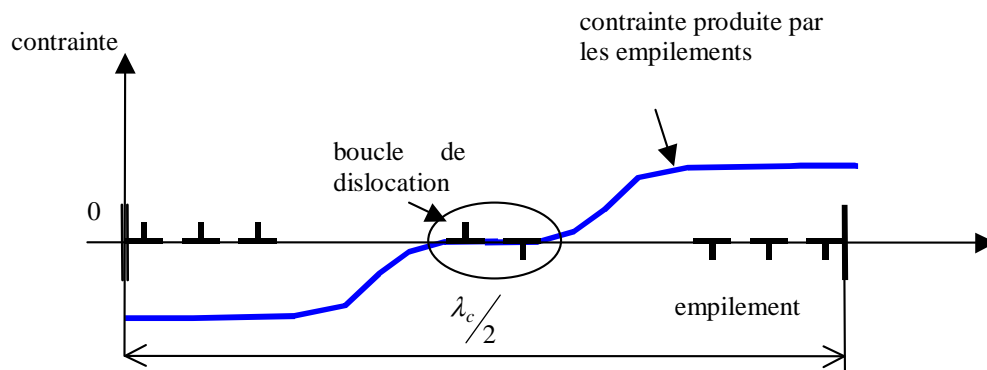


Figure 102 : Allure de la contrainte en présence de sous-structures de dislocations. La variation de cette contrainte est associée aux variations d'amplitude de grande longueur d'onde.

Les pics de contrainte de longueur d'onde beaucoup plus petite ( $\lambda_o$ ) sont associés à des obstacles localisés. Cette contrainte est associée, par exemple, aux vallées de Peierls ou à des dislocations individuelles.

### Equilibre d'un segment de dislocation

Dans un second temps, on met en place l'équilibre d'un segment de dislocation mobile. Un segment de dislocation est soumis à différentes contraintes dont il s'agit de déterminer clairement l'origine tout respectant les conditions d'équilibre mentionnées plus haut.

La contrainte appliquée  $\tau_{app}$

C'est la contrainte induite par les efforts appliqués.

La contrainte de tension de ligne  $\tau_{ligne}$

La contrainte de rappel  $\tau_{ligne}$  est à l'origine même du durcissement. Elle est due à la force de rappel qui s'exerce sur un segment lorsqu'il s'allonge et se courbe sous l'action d'une contrainte. On la qualifie alors d'intrinsèque. C'est elle qui est responsable de l'écrouissage isotrope<sup>7</sup>. La valeur de la tension de ligne critique pour l'activation ne dépend pas du sens de la sollicitation (figure 103). Elle est contrôlée par la distance entre les ancrages.

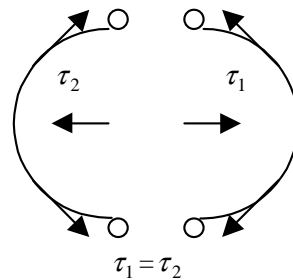


Figure 103 : Isotropie de la tension de ligne par rapport à la contrainte de cisaillement appliquée. La tension de ligne est identique quel que soit le sens de la courbure dans les matériaux cfc.

La contrainte interne  $\tau_{cin}$

C'est la contrainte dont l'origine est associée aux agrégats polarisés de dislocations. D'un point de vue macroscopique, son signe varie périodiquement. Par contre en chargement monotone un segment quelque soit son signe, voit toujours une contrainte répulsive. En trajet direct, elle se soustrait de la contrainte appliquée. Lorsqu'on change de sens de glissement sur le système, cette contrainte vient alors en addition de la contrainte appliquée car l'action répulsive des agrégats sur le segment favorise le mouvement des dislocations. La contrainte appliquée en recharge est moins importante que pour le chargement initial. De ce fait, cette contrainte est responsable d'un écrouissage de type cinématique. On la qualifie alors de cinématique. Cette contrainte est extrinsèque aux effets initialement à l'origine du durcissement. Elle a pour module l'amplitude des variations de la contrainte interne à grande longueur d'onde.

La contrainte de l'obstacle local  $\tau_{obst}$

Cette contrainte est de longueur d'onde très courte, même si son amplitude peut être importante. Elle est perceptible lorsque le segment s'approche par exemple d'une dislocation forêt. Sa valeur est égale à l'amplitude du signal à courte longueur d'onde.

Le segment est donc soumis à l'action des différentes contraintes :

$$\sum \tau_{segment} = \tau_{app} - \tau_{cin} - \tau_{ligne} - \tau_{obst} . \quad (191)$$

Pour obtenir un écoulement généralisé (à l'échelle de la densité de dislocations), il faut que la contrainte appliquée atteigne une valeur qui provoque l'activation de l'ensemble des dislocations nécessaires pour

<sup>7</sup> Le qualificatif "isotrope" a ici un sens restreint. Un système de glissement n'a que deux sens d'activation possibles. Le durcissement est considéré comme isotrope si l'activation se fait avec la même valeur de contrainte quel que soit le sens de la sollicitation. Le durcissement pourrait être anisotrope. Dans les métaux à structure cubique centrée, les vis sont dissociées sur trois plans et présentent un sens de glissement plus facile selon le sens de la contrainte appliquée.



l'accommodation de la déformation plastique imposée. Pour obtenir la loi d'écoulement généralisée, on fait les hypothèses suivantes :

- il existe une longueur moyenne de segment de dislocations (proportionnelle à la densité de forêt qui est à l'origine des points d'ancrage),
- tous les segments des boucles de dislocations, quel soit leur signe, subissent les effets de la contrainte cinématique dans le même sens (par exemple, elle s'oppose sur tous les segments dans le cas de la figure 102),
- les obstacles locaux de petite longueur d'onde sont franchis à l'aide de l'activation thermique.

En fin de chargement monotone, on obtient alors la partition suivante pour les contraintes appliquées à un segment de dislocation :

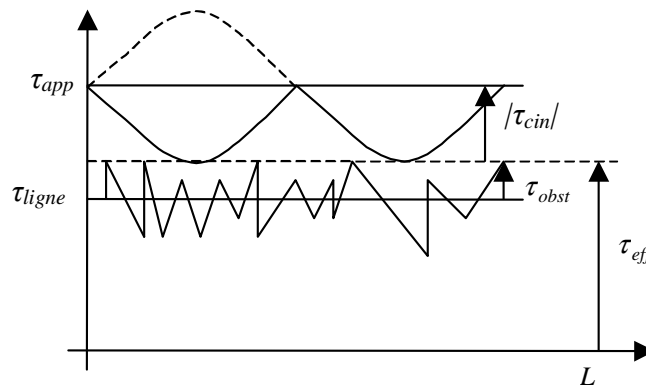


Figure 104 : Partition des contraintes de cisaillement exercées sur le segment de dislocation correspondant à l'activation.

La contrainte cinématique est "redressée" pour tenir compte du fait qu'elle s'oppose (ou s'ajoute) systématiquement à la progression de la boucle.

On considère alors dans ce qui suit une contrainte effective  $\tau_{eff} = \tau_{app} - \tau_{cin}$ . Ce regroupement est justifié parce que ce sont deux contraintes de type externes effectivement appliquées pour vaincre la tension de ligne. On cherche alors le lien entre cette contrainte et le taux de déformation en s'appuyant sur la théorie du franchissement thermiquement activé des obstacles à courte longueur d'onde en contrainte.

#### Détermination de la vitesse de cisaillement en fonction de la contrainte effective

L'analyse thermodynamique du mouvement de dislocation contrôlé par des obstacles locaux dispersés a déjà fait l'objet de nombreux travaux. Pour une information complète et exhaustive, le lecteur pourra se référer à [40] ou [88]. On présente ici l'application de la théorie au cas de la structure cfc pour laquelle les forces de Peierls sont faibles et la sensibilité des mécanismes à la température plutôt faible.

Pour une température donnée, la force à appliquer sur une dislocation pour franchir un obstacle est donnée figure 105 en fonction du déplacement à travers le champ de contrainte qui matérialise l'obstacle. La contrainte  $\tau_\mu$  désigne la contrainte associée à la résistance à la progression qui ne dépend de la température qu'à travers la dépendance de  $\mu$  le module de cisaillement moyen du matériau.

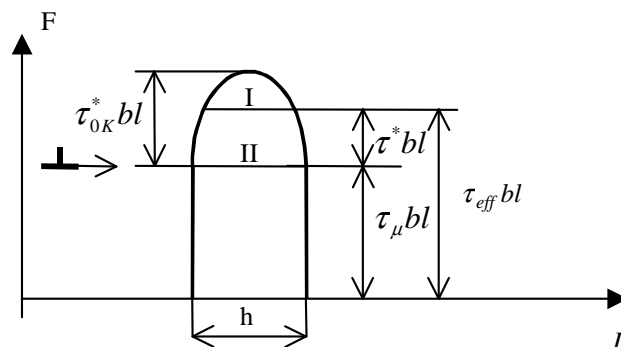


Figure 105 : Force à appliquer pour franchir un obstacle de profil de contrainte donné en fonction du déplacement de la dislocation.

La somme des aires I et II représente l'énergie complémentaire à apporter à la dislocation pour franchir la partie thermiquement activée qui empêche la dislocation de progresser. La partie I est apportée par l'énergie thermique, la partie II par le travail de la sur-contrainte  $\tau^*$  appliquée à la dislocation par rapport à la contrainte  $\tau_\mu$ . La contrainte  $\tau_{0K}^*$  est la valeur de la sur-contrainte  $\tau^*$  qu'il faudrait de toute façon appliquer à la dislocation pour passer l'obstacle à 0K, sans aucune assistance de l'activation thermique. Dans le cas des matériaux à structure cubique à faces centrées, la recherche de l'origine des différentes contraintes est effectuée en considérant un segment de dislocation ancré à ses extrémités, sur le point de générer une boucle (figure 106).

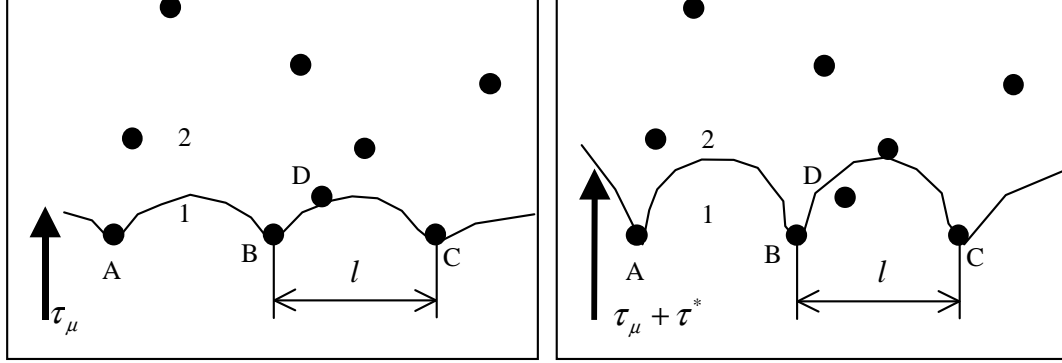


Figure 106 : Représentation schématique d'une dislocation ancrée en A, B et C a) sous l'action d'une contrainte  $\tau_\mu$  et interagissant avec l'obstacle D b) sous l'action de la contrainte  $\tau_\mu + \tau^*$  après franchissement de l'obstacle

Une dislocation d'un système (s) donné est ancrée sur les obstacles A, B et C, considérés comme ponctuels. La longueur  $l$  est la longueur libre du segment considéré. L'équilibre du segment de dislocation est obtenu lorsque la contrainte  $\tau_{eff}$  est compensée par la force de tension de ligne qui crée une force de rappel proportionnelle à l'espacement entre dislocations. L'espacement est approximativement proportionnel à la racine carrée de la densité de dislocations forêts si la répartition de ces dernières est uniforme. La tension de ligne  $\tau_{ligne}$  est alors donnée par :

$$\tau_{ligne} = \frac{\mu b}{R} \approx \alpha \mu b l \approx \alpha \mu b \sqrt{\rho^F} . \quad (192)$$

Une boucle est alors générée et peut éventuellement progresser dans le matériau lorsque la contrainte appliquée dépasse  $\tau_{ligne}$ . En ce sens la contrainte de tension de ligne joue dans le cas présent le rôle de la contrainte athermique. Le franchissement (thermiquement activé) des obstacles à courte longueur d'onde peut alors être envisagé avec l'action de la sur-contrainte  $\tau^*$  appliquée au segment. Les développements qui suivent supposent que la contrainte  $\tau^*$  est modérée, c'est-à-dire  $0,1 \tau_{0K}^* < \tau^* < 0,7 \tau_{0K}^*$  [88].

La dislocation est alors composée d'un ensemble d'oscillateurs (les atomes) de fréquence fondamentale :

$$v_0 = v_D \frac{b}{l} , \quad (193)$$

où la fréquence de Debye est notée :  $v_D$ . La probabilité de franchissement d'un obstacle de faible longueur d'onde est donnée par le facteur  $f_B$  exponentiel de Boltzmann de probabilité de saut avant de la dislocation :

$$f_B = \exp\left(-\frac{\Delta G}{kT}\right) , \quad (194)$$

où  $\Delta G$  est l'énergie apparente de l'obstacle (l'aire I de la courbe figure 105) à la température  $T$ .  $k$  est la constante de Boltzmann qui vaut :  $1,38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ . Dans ce cas, la fréquence de franchissement est :

$$\delta t^{-1} = v_D \frac{b}{l} \exp\left(-\frac{\Delta G}{kT}\right) . \quad (195)$$

Si on suppose que le temps de vol de la dislocation d'un obstacle à l'autre est négligeable devant le temps d'attente pour le franchissement, la vitesse de la dislocation, la vitesse de la dislocation s'obtient en divisant la distance caractéristique entre obstacles  $d$  par le temps  $\dot{\gamma}$  :

$$v = v_D \frac{b}{l} d \exp\left(-\frac{\Delta G}{kT}\right). \quad (196)$$

Il reste maintenant à exprimer la valeur de l'énergie apparente de l'obstacle. Si on revient au diagramme force déplacement de la figure 105, l'énergie à fournir pour le déplacement correspond à la somme des aires I et II. Le travail de la force appliquée sur la dislocation pour franchir la partie thermiquement activée de l'obstacle est égal à l'aire II et vaut approximativement<sup>8</sup> :

$$\Delta W = \tau^* b l h, \quad (197)$$

où  $h$  caractérise l'étendue de l'obstacle. L'énergie  $\Delta G$  s'écrit :

$$\Delta G \approx \Delta G_0 - \tau^* b l h = \Delta G_0 - \tau^* \Delta V^* = \Delta G_0 - \tau^* \Delta A^* b. \quad (198)$$

Dans cette expression,  $\Delta G_0$  est l'énergie totale nécessaire pour le franchissement de l'obstacle et  $\Delta V^*$  et  $\Delta A^*$  ont respectivement la dimension d'un volume et d'une aire. Par définition  $\Delta V^*$  et  $\Delta A^*$  sont appelés volume d'activation et aire d'activation. En reportant cette dernière expression dans l'expression de la vitesse, on obtient :

$$v = v_D \frac{b}{l} d \exp\left(-\frac{\Delta G_0 - \tau^* \Delta V^*}{kT}\right). \quad (199)$$

L'équation d'Orowan (165) est alors utilisée pour obtenir la vitesse de cisaillement moyenne :

$$\dot{\gamma} = \rho_m b d v_D \frac{b}{l} \exp\left(-\frac{\Delta G_0 - \tau^* \Delta V^*}{kT}\right). \quad (200)$$

On appelle  $\dot{\gamma}_0$  le terme pré exponentiel dont l'expression est :

$$\dot{\gamma}_0 = \rho_m b d v_D \frac{b}{l}. \quad (201)$$

Ce terme dépend de la microstructure à travers la densité, et les distances caractéristiques  $d$  et  $l$ . Par exemple, si la répartition des dislocations forêts est uniforme, on obtient  $l = d$  et  $\dot{\gamma}_0 = \rho_m b^2 v_D$ . La plupart du temps,  $\dot{\gamma}_0$  est défini comme une constante car on néglige l'impact de l'évolution de la structure. Du fait du passage à la déformation moyenne, les trois paramètres  $\Delta G_0$ ,  $\Delta V^*$  et  $\tau^*$  sont maintenant des paramètres pseudo phénoménologiques mais ils conservent la signification physique qu'ils avaient pour une dislocation individuelle. On suppose que la relation obtenue de façon indifférenciée pour un système est vraie quel que soit le système (s) d'un matériau à structure cubique à faces centrées :

$$\dot{\gamma}^{(s)} = \rho_m^{(s)} b^2 v_D \exp\left(-\frac{(\Delta G_0 - \tau^{*(s)} \Delta V^*)}{kT}\right). \quad (202)$$

On introduit alors la contrainte résolue "effective"<sup>9</sup> sur le système (s)  $\tau_{eff}^{(s)}$  et la contrainte athermique  $\tau_{\mu}^{(s)}$ . La contrainte  $\tau_{\mu}^{(s)}$  représente la moyenne des contraintes des tensions de ligne des différents segments. On utilise la relation  $\tau_{eff}^{(s)} = \tau_{\mu}^{(s)} + \tau^{*(s)}$  qu'on reporte dans l'équation (202) pour obtenir :

<sup>8</sup> On néglige les zones triangulaires d'extrémités : on suppose que l'obstacle présente un front "raide".

<sup>9</sup> Comme expliqué plus haut, la notion de contrainte effective est ici utilisée au sens large. Elle inclut l'effet de la contrainte cinématique.

$$\dot{\gamma}^{(s)} = \rho_m^{(s)} b^2 v_D \exp \left( \frac{- \left( \Delta G_0 - \left( \frac{\tau_{eff}^{(s)}}{\tau_\mu^{(s)}} - 1 \right) \tau_\mu^{(s)} \Delta V^* \right)}{kT} \right). \quad (203)$$

La sur-contrainte  $\tau^{*(s)}$  est généralement petite devant petite devant  $\tau_\mu^{(s)}$ .  $\frac{\tau_{eff}^{(s)}}{\tau_\mu^{(s)}} - 1$  est proche de 0 et on utilise alors le développement au premier ordre de l'exponentielle pour obtenir :

$$\dot{\gamma}^{(s)} = \rho_m^{(s)} b^2 v_D \exp \left( - \frac{\Delta G_0}{kT} \right) \left( \frac{\tau_{eff}^{(s)}}{\tau_\mu^{(s)}} \right)^{\frac{\tau_\mu^{(s)} \Delta V^*}{kT}}. \quad (204)$$

On obtient finalement la relation suivante :

$$\dot{\gamma}^{(s)} = \dot{\gamma}_0^{(s)} \left( \frac{\tau_{eff}^{(s)}}{\tau_\mu^{(s)}} \right)^{1/m}, \quad (205)$$

où  $\dot{\gamma}_0^{(s)}$  et  $m$  sont liés aux paramètres du matériau par :

$$\dot{\gamma}_0^{(s)} = \rho_m^{(s)} b^2 v_d \exp \left( \frac{-\Delta G_0}{kT} \right) \quad (206)$$

et

$$m = \frac{kT}{\tau_\mu^{(s)} \Delta V^*}. \quad (207)$$

### Conclusion

Un soin tout particulier a été apporté à la justification physique de la loi d'écoulement. Par ce biais on retrouve la relation (205) qui est généralement identifiée sur des essais macroscopiques dans la littérature. A noter que les hypothèses utilisées restreignent l'emploi de cette loi au cas des structures cubiques à faces centrées. La forme de la relation pour une structure cubique centrée par exemple, serait complètement différente en raison de mécanismes de franchissements d'obstacles différents et de l'existence d'une friction de réseau importante. Ce travail fournit également le moyen d'identifier les coefficients en utilisant les paramètres physiques expérimentaux du matériau. D'autres points sont mis en évidence dans cette partie.

Le franchissement d'obstacles locaux dans les matériaux à structure cubique à faces centrées est très faiblement contrôlé par la température. On devrait dégager une faible sensibilité de la loi d'écoulement lors de l'identification des constantes. La partie athermique de l'obstacle s'obtient dans ce volet, lorsqu'on considère que la force appliquée sur la dislocation est équilibrée par la force de tension de ligne, laquelle, comme le rappelle l'équation (192) est proportionnelle à la densité de dislocations. Ceci nous donne une piste de recherche pour la détermination de la forme à donner à l'expression de la contrainte athermique. Par la suite, cette contrainte est simplement désignée par contrainte seuil.

Le modèle nécessite la détermination de la forme de la contrainte cinématique à soustraire de la contrainte appliquée. L'origine de cette contrainte est attribuée à l'effet des agrégats polarisés de dislocations qui se construisent au cours de la déformation. Cet écrouissage peut être introduit sous forme tensorielle et être représentatif de l'effet d'un système actif sur lui-même (effet de la polarité) et sur les autres systèmes (effet de l'accumulation des champs de contraintes sur les autres). Harder [45] opte pour ce type de décomposition. La loi d'écoulement qu'il propose a la forme suivante :

$$\dot{\gamma}^{(s)} = \dot{\gamma}_0 \left( \frac{|\tau_{eff}^{(s)}|}{\mu} \right) \exp \left\{ -\frac{\Delta H}{kT} \left[ 1 - \frac{|\tau_{eff}^{(s)}|}{\tau_{\mu}^{(s)}} \right] \right\} \text{signe}(\tau_{eff}^{(s)}), \quad (208)$$

où la contrainte résolue effective  $\tau_{eff}^{(s)}$  est considérée comme l'action motrice pour le mouvement de la dislocation. Elle est définie comme la différence entre la contrainte appliquée résolue  $\tau^{(s)}$  et une contrainte interne résolue  $\tau_{cin}^{(s)}$ . La contrainte résolue  $\tau^{(s)}$  est la projection du tenseur de contraintes appliquées  $\sigma$ . La contrainte résolue  $\tau_{cin}^{(s)}$  est la projection du tenseur de contraintes internes  $\sigma_{cin}$ .

$$\tau_{eff}^{(s)} = \tau^{(s)} - \tau_{cin}^{(s)} = ((\sigma - \sigma_{cin}) \mathbf{n}^{(s)}) \cdot \mathbf{g}^{(s)}. \quad (209)$$

Les autres grandeurs considérées dans l'équation sont l'énergie d'activation  $\Delta H$ , la constante de Boltzmann  $k$ , la température  $T$  et le paramètre matériau  $\dot{\gamma}_0$ . La contrainte de référence  $\tau_{\mu}^{(s)}$  est considérée dans l'article comme une mesure pour le seuil d'écoulement.

### Détermination des contraintes seuil

Il n'existe pas, à ma connaissance, de travaux qui permettent de déterminer depuis le niveau le plus petit, la forme de la relation déterminant l'expression générale des contraintes seuil. Dès l'introduction, l'équation (177) nous montre que la forme générale de la contrainte d'écoulement en fonction de la densité de dislocation totale  $\rho$  (supposée homogène sur le monocristal considéré) est  $\sigma = \alpha \mu b \sqrt{\rho}$ .  $\mu$  est le module de cisaillement,  $\alpha$  est un facteur de proportionnalité qui vaut environ 0,3 pour le cuivre. Cette loi considère comme égales toutes les influences des différentes dislocations. Elle est confirmée par l'analyse faite au niveau d'une source de Frank-Read. Pour obtenir une loi plus générale, nous supposons que cette forme est valable pour déterminer la contrainte d'écoulement d'un système de dislocations en un point du cristal. Une distinction de l'effet de chaque système sur cette contrainte est cependant introduite avec les facteurs de corrections  $d^{(sp)}$  associés à chaque famille de dislocations dans la racine :

$$\tau_{\mu}^{(s)} = \mu b \sqrt{d^{(su)} \rho^{(u)}}. \quad (210)$$

Cette modification est fondée sur l'idée que les systèmes de dislocations n'ont pas forcément le même rôle dans la détermination de la contrainte sur un système donné.

### Comportement élastique du monocristal

Il reste à ajouter à cet ensemble de loi la description du comportement élastique du monocristal. On utilise la même relation que pour le polycristal équation (97) dans le cas des petites déformations élastiques. La matrice de rigidité exprimée dans les axes liés à la maille cubique a cette fois la forme proposée équation (211) en utilisant la notation de Voigt. Trois constantes indépendantes sont nécessaires pour décrire le comportement élastique anisotrope des métaux à structure cubique.

$$[C_{IJ}^E] = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix} \quad (211)$$

Les valeurs courantes des constantes élastiques de quelques matériaux sont données à titre indicatif dans le tableau 11.

Matériau	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{44}$
Al	122,2	90,7	45,4
Cu	166,1	111,9	75,6

Tableau 11 : Valeurs des constantes élastiques du cuivre et de l'aluminium en GPa.

## Bilan

### *Un cadre cohérent*

Les équations (190), (205) et (210) composent le modèle de plasticité proposé pour les matériaux à structure cubique à faces centrées pour des températures largement inférieures à la température de fusion. Cette formulation intègre les différents mécanismes physiques sur l'ensemble des systèmes de dislocations. Au cours des différentes intégrations, chacun des paramètres du modèle a conservé une signification physique. La valeur de ces paramètres ne doit pas être trop éloignée de la grandeur déterminée originalement à l'échelle de la physique. Par exemple,  $y_c$  est une distance d'annihilation dont la valeur identifiée doit rester compatible avec l'ordre de grandeur de 4 à 5 fois la valeur de l'amplitude du vecteur de Burgers à température ambiante pour le cuivre. L'analyse menée ici permet aussi d'attribuer une origine à l'écrouissage du matériau. On distingue un écrouissage intrinsèque (ou isotrope) sur chaque système provoqué par la diminution des longueurs moyenne de segments de dislocation. La contrainte extrinsèque (cinématique) provoquée par les agrégats polarisés de dislocations vient s'opposer en trajet monotone à la contrainte appliquée. En changeant de sens de chargement, les contraintes polarisées assistent alors la contrainte appliquée. Ces considérations expliquent bien l'effet macroscopique désigné par effet Bauschinger observé sur les matériaux lorsqu'on effectue une traction suivie d'une compression.

On a ainsi un cadre pour la plasticité cohérent et valable à l'échelle d'une dislocation jusqu'au comportement macroscopique du matériau.

### *Matrice d'écrouissage*

La matrice d'écrouissage lie le taux d'écrouissage sur les systèmes avec les taux de déformation. Les relations proposées permettent de calculer la matrice d'écrouissage  $[h]$  :

$$\dot{\epsilon}_{\mu}^{(s)} = \sum_{u=1}^N \frac{\mu d^{(su)}}{2 \sqrt{\sum_{u=1}^N d^{(su)} \rho^{(u)}}} \underbrace{\left( \frac{\sqrt{\sum_{p=1}^N a^{(up)} \rho^{(p)}}}{K} - 2 y_c \rho^{(u)} \right)}_{h^{(su)}} \dot{\gamma}^{(u)} \quad (212)$$

Ce modèle définit donc une matrice d'écrouissage de façon tout à fait standard.

La vitesse moyenne de cisaillement sur chaque système est alors utilisée dans le calcul des grandeurs de la mécanique des milieux continus en grandes transformations [89]. La formulation du modèle le rend compatible avec le cadre classique de la mécanique des milieux continus. La résolution de problèmes généraux avec des conditions aux limites quelconques avec ce modèle comme loi de comportement sont envisageables.

### **Les différentes façons d'intégrer cette loi**

L'étude de la plasticité des monocristaux implique l'utilisation d'un cadre cinématique spécifique pour traiter les grandes transformations. Ce cadre est présenté à plusieurs reprises (voir par exemple [84]). On rappelle les notions nécessaires à la compréhension générale du manuscrit.

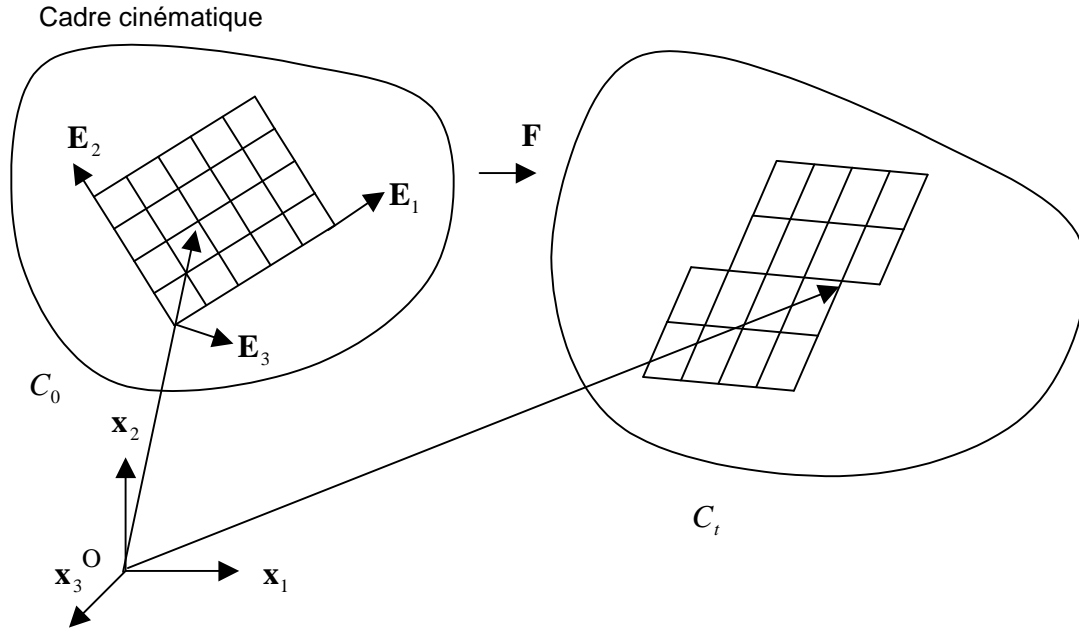


Figure 107 : Configuration et cinématique de la déformation élasto-viscoplastique du monocristal.

La déformation globale fait passer le volume de matière d'une configuration  $C_0$  à la configuration déformée  $C_t$  (figure 107).

#### Décomposition du gradient de la transformation

On utilise alors une décomposition générale du gradient  $\mathbf{F}$  de la transformation sous forme de produit de contributions purement élastique ou purement plastique [54]. Les différentes configurations de déformations sont alors relatives à un repère cartésien  $(O, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  constant attaché par exemple au laboratoire ou à la machine d'essai qui impose les conditions de déformation au cristal.

La plasticité provient du mouvement de dislocations sur chaque système de glissement ( $s$ ) caractérisé par le vecteur unitaire de glissement et la normale unitaire au plan de glissement. Pour un monocristal (ou le grain d'un agrégat cristallin), cette décomposition est effectuée en faisant recours à différentes configurations spécifiques autour d'un point.

L'expression de la plasticité dans une configuration locale  $\bar{C}_0$  liée à la maille cristallographique de la structure se fait uniquement en fonction la vitesse de glissement sur chacun des systèmes de glissement ( $s$ ) de la structure et n'introduit pas de rotation de réseau. On appelle  $\bar{\mathbf{e}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{e}}_2$  et  $\bar{\mathbf{e}}_3$ , les vecteurs invariants unitaires associés à la maille cristalline dans cette configuration. Le passage de la configuration non déformée plastiquement du cristal, dénommée configuration locale isocline relâchée, à la configuration  $\bar{C}_t$  du cristal déformé par une déformation plastique pure est donnée par le gradient de transformation plastique  $\mathbf{F}^p$  (figure 108). Les vecteurs  $\bar{\mathbf{G}}^{(s)}$  et  $\bar{\mathbf{N}}^{(s)}$  sont invariants par la déformation plastique. On a donc :

$$\bar{\mathbf{g}}^{(s)} = \mathbf{F}^p \bar{\mathbf{G}}^{(s)} = \bar{\mathbf{G}}^{(s)} \quad (213)$$

$$\bar{\mathbf{n}}^{(s)} = \mathbf{F}^p \bar{\mathbf{N}}^{(s)} = \bar{\mathbf{N}}^{(s)}$$

Dans la suite, on considère uniquement  $\bar{\mathbf{g}}^{(s)}$  et  $\bar{\mathbf{n}}^{(s)}$  qu'on soit dans la configuration  $\bar{C}_0$  ou  $\bar{C}_t$ .

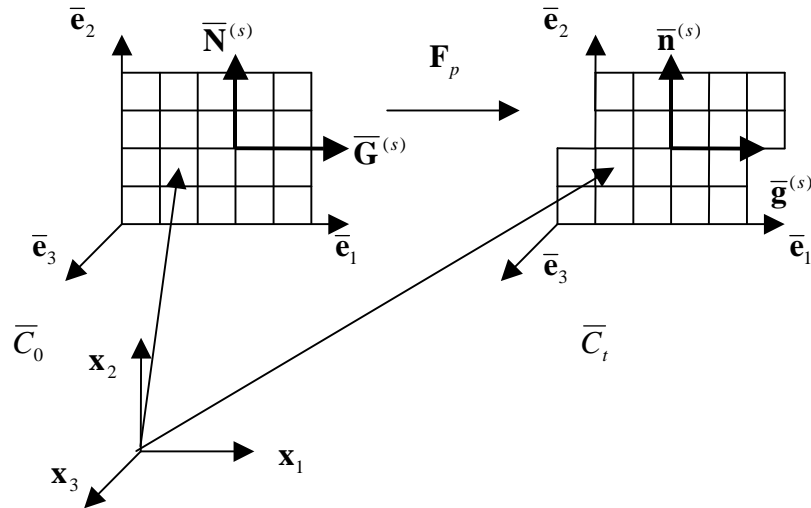


Figure 108 : Transformation plastique.

Pour placer l'élément de volume du cristal non déformé dans la configuration locale isocline  $\bar{C}_0$  (figure 109), on lui applique la rotation qui fait coïncider les vecteurs  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$  et  $\mathbf{E}_3$  associés à la maille cristallographique avec la base générale  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ . Les images de ces vecteurs sont les vecteurs  $\bar{\mathbf{e}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{e}}_2$  et  $\bar{\mathbf{e}}_3$ . Les vecteurs du système de glissement tournés dans la configuration initiale sont notés  $\mathbf{G}^{(s)}$  et  $\mathbf{N}^{(s)}$ . Avec cette procédure  $\mathbf{F}_0^e$  correspond donc à une rotation pure. D'un point de vue pratique, l'inverse  $\mathbf{R}_0$  de cette rotation donne accès à l'expression des axes du réseau cubique dans la base générale :

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{R}_0 \bar{\mathbf{e}}_i. \quad (214)$$

On choisit donc d'écrire :

$$\mathbf{F}_0^e = \mathbf{R}_0^T. \quad (215)$$

Cette transformation est présentée sur la figure 109.

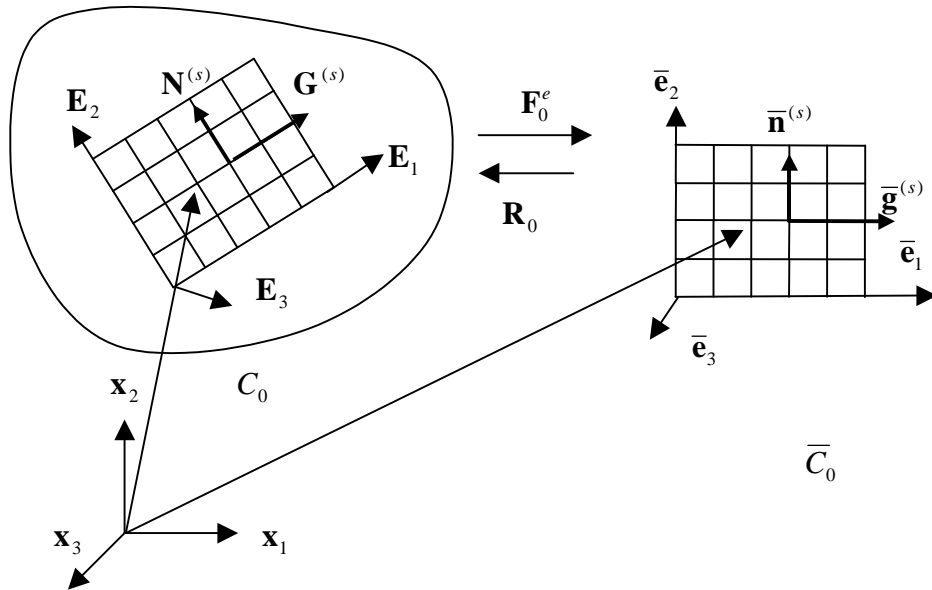


Figure 109 : Passage de la configuration initiale à la configuration locale isocline.

Il reste à appliquer la transformation  $\mathbf{F}^e$  qui fait passer du cristal déformé dans la configuration  $\bar{C}_t$  à la configuration  $C_t$ . Cette contribution supporte la partie thermoélastique de la transformation globale. Les



vecteurs  $\mathbf{g}^{(s)}$  et  $\mathbf{n}^{(s)}$  du système de glissement dans cette configurations sont obtenus par :

$$\mathbf{g}^{(s)} = \mathbf{F}^e \bar{\mathbf{g}}^{(s)}, \quad \mathbf{n}^{(s)} = \mathbf{F}^e \bar{\mathbf{n}}^{(s)}. \quad (216)$$

Finalement la décomposition globale de la transformation élastoviscoplastique est donnée sur la figure 110.

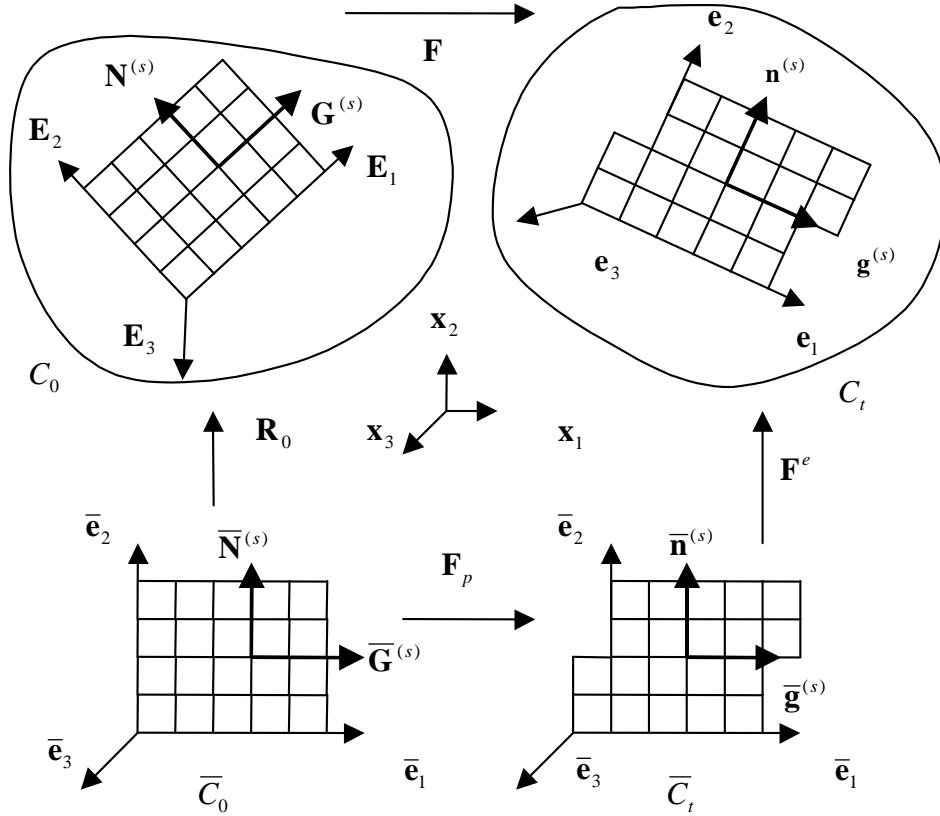


Figure 110 : Transformation globale.

La décomposition multiplicative du gradient de la transformation globale est donnée par :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \mathbf{R}_0^T. \quad (217)$$

#### Gradient des vitesses

Le traitement des grandes transformations se fait généralement plus facilement en utilisant  $\mathbf{L}$  le gradient des vitesses de déformation. On utilise l'équation (51) pour le lier au gradient de la transformation :

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{e-1} + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1} \mathbf{F}^{e-1}, \quad (218)$$

qu'on décompose de façon additive en une partie élastique et une partie plastique. La partie élastique  $\mathbf{L}^e$  du gradient total est :

$$\mathbf{L}^e = \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{e-1}. \quad (219)$$

La partie plastique  $\mathbf{L}^p$  du gradient total est :

$$\mathbf{L}^p = \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1} \mathbf{F}^{e-1}. \quad (220)$$

Comme la déformation plastique est provoquée par le glissement plastique qui se produit sur les différents systèmes de glissement, la relation suivante dans la configuration locale isocline qui lie le gradient plastique aux vitesses de glissement de plastiques est utilisée :

$$\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{p-1} = \sum_s (\bar{\mathbf{g}}^{(s)} \otimes \bar{\mathbf{n}}^{(s)}) \dot{\gamma}^{(s)}. \quad (221)$$

### Hypothèse des petites déformations élastiques

Pour les métaux, la déformation thermoélastique reste petite devant la déformation plastique. Dans ce cas on utilise la décomposition polaire (équation (39)) de  $\mathbf{F}^e$  où  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est le tenseur des petites déformations élastiques :

$$\mathbf{F}^e = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{R} \quad \text{avec} \quad |\boldsymbol{\varepsilon}| \ll 1 \quad (222)$$

qu'on reporte dans l'équation (221) pour obtenir :

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \overset{o}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \sum (\mathbf{g}^{(s)} \otimes \mathbf{n}^{(s)})\dot{\gamma}^{(s)}, \quad (223)$$

$\overset{o}{\boldsymbol{\varepsilon}}$  est la dérivée objective de Jaumann et est déterminée par :

$$\overset{o}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T, \quad (224)$$

Les tenseurs vitesse de déformation et vitesses de rotation sont alors respectivement définis par :

$$\mathbf{D} = \overset{o}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \sum_s (\mathbf{g}^{(s)} \otimes \mathbf{n}^{(s)} + \mathbf{n}^{(s)} \otimes \mathbf{g}^{(s)})\dot{\gamma}^{(s)} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p, \quad (225)$$

et

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \frac{1}{2} \sum_s (\mathbf{g}^{(s)} \otimes \mathbf{n}^{(s)} - \mathbf{n}^{(s)} \otimes \mathbf{g}^{(s)})\dot{\gamma}^{(s)} = \mathbf{W}^e + \mathbf{W}^p, \quad (226)$$

$\dot{\mathbf{R}}$  est la vitesse de rotation du réseau cristallin et est déduit de l'expression ci-dessus :

$$\dot{\mathbf{R}} = (\mathbf{W} - \frac{1}{2} \sum_s (\mathbf{g}^{(s)} \otimes \mathbf{n}^{(s)} + \mathbf{n}^{(s)} \otimes \mathbf{g}^{(s)})\dot{\gamma}^{(s)})\mathbf{R} = (\mathbf{W} - \mathbf{W}^p)\mathbf{R}, \quad (227)$$

Ce cadre cinématique est utilisé pour effectuer les différentes intégrations du modèle de comportement proposé pour différents cas de figure. On obtient différents traitements selon que l'on suppose :

- que le comportement est homogène sur l'échantillon et qu'il n'y a pas de rotation,
- que le comportement est homogène,
- qu'il n'y a pas d'hypothèse particulière.

### Intégration dans le cas du glissement double symétrique

En glissement double symétrique, il ne se produit pas de rotation de réseau. L'intégration des lois est alors tout à fait simplifiée.

La situation de glissement double symétrique s'obtient en traction lorsque l'axe de l'éprouvette est sur un axe de symétrie cristallographique. Les systèmes actifs dans ce cas sont les systèmes C1 et B4 (notation de Schmid et Boas) qu'on numérote 1 et 2. L'objectif est alors d'obtenir, par exemple, la relation entre la contrainte interne  $\tau_\mu^{(1)}$

et le glissement accumulé  $\gamma^{(1)}$ . On suppose alors que toutes les quantités attachées aux deux systèmes sont égales. Cette configuration particulière se retrouve expérimentalement et justifie l'intérêt du calcul. La contrainte interne est évaluée en utilisant l'équation (210) dans laquelle on néglige la densité de dislocations initiales des systèmes inactifs devant les densités courantes  $\rho^{(1)}$  et  $\rho^{(2)}$  des systèmes actifs :

$$\tau_\mu^{(1)} = \mu b \sqrt{d^{(11)}\rho^{(1)} + d^{(12)}\rho^{(2)}} = \mu b \sqrt{d^{(11)} + d^{(12)}} \sqrt{\rho}. \quad (228)$$

On appelle indifféremment  $\rho$  la valeur<sup>10</sup> de densité  $\rho^{(1)}$  ou  $\rho^{(2)}$ . Le taux de production de dislocations sur le système 1 est calculé avec l'équation (190) :

<sup>10</sup> En considérant la densité totale de dislocations  $\rho_{tot} = 2\rho$ , on obtient un lien entre la grandeur  $\alpha$  de l'équation

(177) et les paramètres de l'équation (228) :  $\alpha = \frac{\sqrt{d^{(11)} + d^{(12)}}}{2}$

$$\dot{\rho}^{(1)} = \frac{1}{b} \left( \frac{\sqrt{a^{(11)} \rho^{(1)} + a^{(11)} \rho^{(1)}}}{K} - 2y_c \rho^{(1)} \right) \dot{\gamma}^{(1)}. \quad (229)$$

De la même façon, on appelle indifféremment  $\gamma$  la quantité  $\gamma^{(1)}$  ou  $\gamma^{(2)}$ . L'équation (229) s'écrit alors :

$$\dot{\rho} = \frac{1}{b} \left( \frac{\sqrt{a^{(11)} \rho + a^{(11)} \rho}}{K} - 2y_c \rho \right) \dot{\gamma}. \quad (230)$$

La forme dérivée de l'équation (228) et sa forme originale sont exploitées dans l'équation (230) pour obtenir l'équation différentielle suivante, qui lie le taux de glissement à la contrainte interne :

$$\dot{\gamma} = \frac{b}{y_c} \frac{\dot{\tau}_\mu}{\frac{\sqrt{(a^{(11)} + a^{(12)})(d^{(11)} + d^{(12)})} \mu b}{2Ky_c} - \tau_\mu}. \quad (231)$$

L'intégration de cette relation fournit la relation cherchée depuis le début :

$$\tau_\mu = \frac{\tilde{\alpha} \mu b}{2Ky_c} \left( 1 - \exp\left(-\frac{y_c}{b} \gamma\right) \right), \quad (232)$$

si on appelle  $\tilde{\alpha} = \sqrt{(a^{(11)} + a^{(12)})(d^{(11)} + d^{(12)})}$ . Cette relation correspond à une forme exponentielle avec saturation pour les valeurs de  $\gamma$  supérieures à  $\frac{b}{y_c}$ . La valeur de saturation  $\tau_{\mu sat}$  dépend de la température principalement à cause de la dépendance de  $y_c$  et vaut :

$$\tau_{\mu sat} = \frac{\tilde{\alpha} \mu b}{2Ky_c} \quad (233)$$

La pente initiale de la courbe est calculée pour  $\gamma = 0$  :

$$\left. \frac{d\tau_\mu}{d\gamma} \right|_{\gamma=0} = \frac{\tilde{\alpha} \mu}{2K}, \quad (234)$$

Cette forme analytique est utilisable pour faire des identifications rapides sans ajustement numérique. Elle montre également l'incidence des paramètres sur la courbe. Par exemple, le produit  $Ky_c$  a une incidence directe sur la valeur de la valeur de saturation en stade III. On retrouve aussi que la pente en stade II ne dépend pas de paramètres liés à la température.

La situation de glissement double est systématiquement atteinte par tout cristal orienté initialement pour du glissement simple. Toute situation de glissement simple débouche donc sur le cas de figure ci-dessus : plus de rotation, densités de dislocation égales sur chacun des systèmes, position symétrique de l'axe de traction. Ceci montre que, quelle que soit la position initiale de traction, les courbes d'écrouissage de la contrainte résolue en fonction du glissement primaire tendent toutes vers la même courbe. Il y aura simplement un décalage de l'axe des abscisses, le stade I ayant simplement un effet plus ou moins retardateur.

### Intégration numérique dans le cas de la traction

#### *Introduction et hypothèses initiales*

Dans le cas d'un essai de traction sur une éprouvette monocristalline, l'état de déformation et de contrainte est uniforme dans l'éprouvette. Un point de l'éprouvette est représentatif de l'état général de l'éprouvette. Dans ce cas, une intégration numérique des lois est proposée afin de lier les variables locales  $(\tau^{(s)}, \gamma^{(s)}, \rho^{(s)})$  impliquées dans les trois équations descriptives (190), (205) et (210) du modèle granulaire d'un point de l'éprouvette aux variables macroscopiques  $(\sigma, \epsilon)$  de l'essai. Le calcul de l'évolution de l'orientation cristalline est également effectué. On a choisi de proposer cette intégration qui est parfois une alternative pratique au calcul par éléments finis qui prend relativement beaucoup plus de temps.

L'essai de traction est piloté à vitesse de déformation constante. On suppose que la déformation imposée est accommodée par deux systèmes uniquement. Les grandeurs relatives au système primaire sont référencées avec la lettre p et celle pour le système secondaire avec la lettre s. La structure est de type cubique à faces centrées. Les calculs sont conduits en négligeant la déformation élastique et en utilisant une description lagrangienne réactualisée : la configuration de référence est la configuration actuelle de l'instant  $t$ .

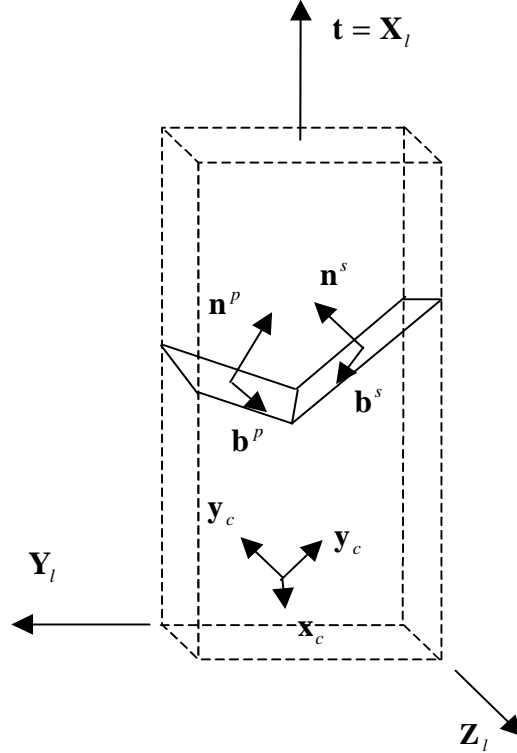


Figure 111 : Configuration et géométrie adoptée pour l'intégration des lois dans le cas d'une traction sur monocristal.

Le système primaire et le système secondaire activés lors de la déformation sont respectivement définis par leur normale unitaire au plan de glissement  $\mathbf{n}^p$ ,  $\mathbf{n}^s$  et leur direction unitaire de glissement  $\mathbf{g}^p$  et  $\mathbf{g}^s$ . La représentation des vecteurs s'effectue soit dans le repère éprouvette soit dans le repère cristallographique en fonction des besoins. La géométrie de l'essai et le repère  $(\mathbf{X}_l, \mathbf{Y}_l, \mathbf{Z}_l)$  attaché à l'éprouvette sont présentés sur la figure 111. Le repère  $(\mathbf{x}_c, \mathbf{y}_c, \mathbf{z}_c)$  est lié au réseau cristallographique. Le vecteur  $\mathbf{t}$  définit l'axe de traction. L'incrément longitudinal de déformation plastique pour un pas de calcul est  $d\varepsilon_{11}^{plast} = \dot{\varepsilon}_0 dt$  où  $\dot{\varepsilon}_0$  est la vitesse de déformation imposée constante durant l'essai et  $dt$  le pas de temps adopté.

Les lois de comportement (équations (205) et (210)) sont adaptées au cas présent. Deux types d'interaction sont considérés. L'auto-écrouissage provoqué par les dislocations d'un système sur les dislocations de ce système est traduit par le coefficient  $d_{auto}$ . Les interactions entre deux systèmes différents sont supposées être identiques quel que soit le couple de systèmes. Le coefficient d'interaction entre dislocation forêts est donc unique et désigné par  $d_{latent}$ . Les densités initiales des systèmes ont pour valeur  $\rho_0$ . Elles sont maintenues constantes pour les systèmes qui ne sont pas actifs. Le calcul des contraintes seuil pour les systèmes primaire et secondaires sont alors :

$$\begin{aligned}\tau_{\mu}^p &= \mu b \sqrt{d_{auto} \rho^p + d_{latent} (\rho^s + 10 \rho_0)} \\ \tau_{\mu}^s &= \mu b \sqrt{d_{auto} \rho^s + d_{latent} (\rho^p + 10 \rho_0)}\end{aligned}\quad (235)$$

La vitesse d'écoulement de chacun des systèmes est calculée avec la loi d'écoulement :

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}^p &= \dot{\gamma}_0 \frac{\tau^p}{\tau_\mu^p} \left| \frac{\tau^p}{\tau_\mu^p} \right|^{\frac{1}{m}-1} \\ \dot{\gamma}^s &= \dot{\gamma}_0 \frac{\tau^s}{\tau_\mu^s} \left| \frac{\tau^s}{\tau_\mu^s} \right|^{\frac{1}{m}-1}.\end{aligned}\quad (236)$$

La loi d'évolution des densités de dislocation est particularisée pour le cas présent :

$$\begin{aligned}d\rho^p &= \frac{1}{b} \left( \frac{\sqrt{a_0\rho^p + a_3(\rho^s + \rho_0)} + 5a_1\rho_0 + 4a_2\rho_0}{K} - 2y_c\rho^p \right) \dot{\gamma}^p \\ d\rho^s &= \frac{1}{b} \left( \frac{\sqrt{a_0\rho^s + a_3(\rho^p + \rho_0)} + 5a_1\rho_0 + 4a_2\rho_0}{K} - 2y_c\rho^s \right) \dot{\gamma}^s,\end{aligned}\quad (237)$$

On utilise les relations de couplage entre microstructure et grandeurs macroscopiques en petites déformations. Ceci est rendu possible par le choix de la description lagrangienne réactualisée : les déformations restent petites sur un pas de calcul. L'adaptation des formules générales proposées dans le cadre cinématique au cas présent donne :

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \sum_{s=1}^n \dot{\gamma}^{(s)} (\mathbf{n}^{(s)} \otimes \mathbf{g}^{(s)} + \mathbf{g}^{(s)} \otimes \mathbf{n}^{(s)}) \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \sum_{s=1}^n \dot{\gamma}^{(s)} (\mathbf{g}^{(s)} \otimes \mathbf{n}^{(s)} - \mathbf{n}^{(s)} \otimes \mathbf{g}^{(s)})\end{aligned}\quad (238)$$

Pour la contrainte, on utilise la relation suivante :

$$\sigma_{11} = \frac{\tau^p}{n_1^p g_1^p} = \frac{\tau^s}{n_1^s g_1^s}, \quad (239)$$

où  $n_i$  et  $g_i$ ,  $i \in \{1,2,3\}$ , sont les composantes des vecteurs  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{g}$  dans le repère  $(\mathbf{X}_l, \mathbf{Y}_l, \mathbf{Z}_l)$  attaché à l'éprouvette.

On utilise l'expression du tenseur des vitesses de déformation pour calculer l'incrément de déformation longitudinale dans le cas où les systèmes p et s sont seuls actifs :

$$d\varepsilon_{11} = n_1^p g_1^p \dot{\gamma}^p dt + n_1^s g_1^s \dot{\gamma}^s dt, \quad (240)$$

On utilise cette relation couplée à la relation d'écoulement pour obtenir la relation qui lie l'incrément de déformation sur le second système à l'incrément de déformation longitudinale :

$$\dot{\gamma}^s = \frac{\dot{\varepsilon}_{11}}{n_1^s g_1^s + n_1^p g_1^p \left| \frac{n_1^p g_1^p \tau_\mu^s}{n_1^s g_1^s \tau_\mu^p} \right|^{\frac{1}{m}-1} \left( \frac{n_1^p g_1^p \tau_\mu^s}{n_1^s g_1^s \tau_\mu^p} \right)}.\quad (241)$$

Cette relation est utilisée dans la relation (240) pour obtenir la valeur de glissement sur le premier système :

$$\dot{\gamma}^p = \frac{\dot{\varepsilon}_{11} - n_1^s g_1^s \dot{\gamma}^s}{n_1^p g_1^p}, \quad (242)$$

### Procédure d'intégration

#### Initialisation

Les vecteurs du repère sont choisis de la façon suivante :

$$\mathbf{X}_l = \mathbf{t}, \mathbf{Z}_l = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}^s, \mathbf{Y}_l = \mathbf{Z}_l \wedge \mathbf{t}.$$

Les densités sur tous les systèmes sont initialisées à  $\rho_0$ .

Les quantités de glissement accumulé sur les systèmes p et s sont mises à 0 :  $\gamma^p = \gamma^s = 0$ .

#### Boucle principale

Calcul des contraintes seuil  $\tau_\mu^p$  et  $\tau_\mu^s$

Equation (235)

Calcul des incréments de déformation  $d\gamma^s$  et  $d\gamma^p$

Equations (241) et (242)

Calcul des incréments de densités de dislocations  $d\rho^p$  et  $d\rho^s$

Equation (237)

Calcul des cissions résolues  $\tau^p$  et  $\tau^s$  sur chacun des systèmes par inversion de la loi d'écoulement

Equation (236)

Calcul de la contrainte  $\sigma_{11}$

Equation (239)

Actualisation des variables :  $\gamma_{t+\Delta t}^p, \gamma_{t+\Delta t}^s, \rho_{t+\Delta t}^p$  et  $\rho_{t+\Delta t}^s$  selon le schéma explicite suivant :

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}dt$$

Calcul du tenseur vitesse de rotation  $\dot{\omega}$

2<sup>ème</sup> partie de l'équation (238)

Actualisation des vecteurs des systèmes de glissement  $\mathbf{n}^p, \mathbf{n}^s, \mathbf{g}^p$  et  $\mathbf{g}^s$  en utilisant le tenseur de vitesse de rotation selon le schéma :

$$\mathbf{v}_{t+\Delta t} = (1 + \dot{\omega}dt)\mathbf{v}_t$$

Fin de boucle

Cet algorithme est programmé en fortran et a donné naissance à un code baptisé MiniSim. Une autre version, non détaillée ici, offre la possibilité d'intégrer n'importe quel modèle viscoplastique pour lequel la détermination de la matrice d'écrouissage est possible. Le calcul des déformations est réalisé sur les 12 systèmes de la structure cfc.

#### Intégration numérique dans le cas général par la méthode des éléments finis

L'intégration des relations dans le cas général tridimensionnel avec conditions aux limites complexes a été réalisée sur la base de la théorie présentée dans les section suivantes.

##### Principe des puissances virtuelles

La méthode des éléments finis sur un domaine donné utilise une formulation intégrale équivalente aux équations d'équilibre (161) et de liaison (160) pour l'ensemble des points du domaine. On utilise ici une forme lagrangienne réactualisée. La configuration de référence est alors celle correspondant à l'instant  $t$ . La transformation considérée est celle qui a lieu durant l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$  (figure 112).

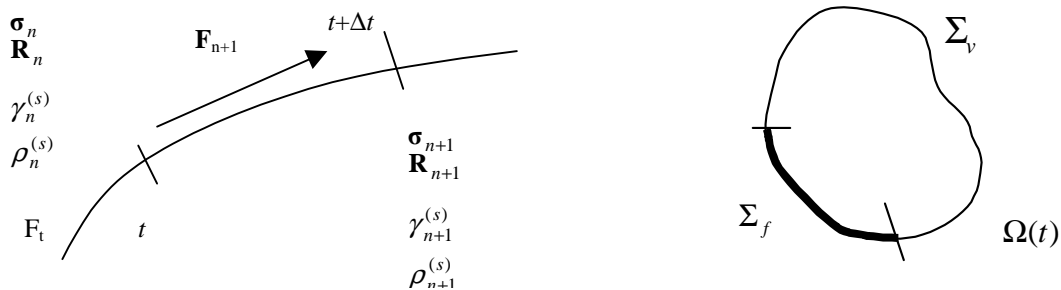


Figure 112 : Schéma lagrangien réactualisé et volume de référence.

Si on néglige les forces volumiques, le principe des puissances virtuelles (puissance des efforts intérieurs = puissance des efforts extérieurs) s'écrit sous la forme lagrangienne réactualisée :

$$\int_{\Omega(t)} (\boldsymbol{\sigma} + \Delta \mathbf{S}) : \delta \mathbf{L} d\Omega = \int_{\Sigma(t)} (\mathbf{t}^* + \Delta \mathbf{s}^*) \delta \mathbf{v} d\Sigma, \quad (243)$$

quelles que soient les vitesses virtuelles<sup>11</sup>  $\delta \mathbf{v}$ .  $\delta \mathbf{L}$  est obtenu par dérivation temporelle des vitesses virtuelles. L'intégration est effectuée à l'instant  $t$  sur le domaine  $\Omega(t)$  et la surface  $\Sigma(t)$ .

- $\Delta \mathbf{S}$  est l'incrément du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff,
- $\Delta \mathbf{s}^* = \mathbf{s}^* \Delta t$  est l'incrément de contrainte nominale,
- $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur de contraintes de Cauchy,
- $\mathbf{t}^*$  est le vecteur de contrainte de Cauchy.

On démontre [84] que, dans le cas des petites déformations élastiques, l'incrément du premier tenseur des contraintes s'exprime :

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{D} : (\mathbf{L} \Delta t) - \sum_s \Delta \gamma^{(s)} \mathbf{R}^{(s)}, \quad (244)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(s)} &= \mathbf{c}^E : \mathbf{D}^{(s)} - \mathbf{W}^{(s)} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{W}^{(s)} \\ \mathbf{D}_{ijkl} &= c_{ijkl}^E + \delta_{ik} \sigma_{lj} \end{aligned} \quad (245)$$

$\mathbf{c}^E$  est le tenseur des constantes élastiques du matériau relatives à la configuration  $\mathbf{C}(t)$ . La forme intégrale du principe des puissances virtuelles, équation (243), s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t)} (\mathbf{D} : (\mathbf{L} \Delta t)) : \delta \mathbf{L} d\Omega &= \int_{\Omega(t)} \left( \sum_s \Delta \gamma^{(s)} \mathbf{R}^{(s)} \right) : \delta \mathbf{L} d\Omega \\ &+ \int_{\Sigma(t)} (\Delta \mathbf{s}^*) \delta \mathbf{v} d\Sigma + \left\{ \int_{\Sigma(t)} (\mathbf{t}^*) \delta \mathbf{v} d\Sigma - \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{L} d\Omega \right\}, \end{aligned} \quad (246)$$

où le terme entre accolades représente la contributions des forces non-équilibrées lors du calcul.

#### Discretisation du principe des puissances virtuelles

Pour utiliser la méthode des éléments finis, il faut opérer une discrétisation du domaine en éléments. La version actuelle du code utilise un élément à 20 nœuds et 14 points d'intégration. Les mêmes fonctions d'interpolation spatiales sont utilisées pour les vitesses, les vitesses virtuelles ou encore les calculs des gradients. Ainsi, le vecteur vitesse d'un point  $M(r, s, t)$  appartenant à l'élément s'écrit en fonction des 20 vitesses nodales  $\mathbf{v}_i^{\text{élément}}$ ,  $i \in \{1, \dots, 20\}$  :

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{20} N_i(r, s, t) \mathbf{v}_i^{\text{élément}}. \quad (247)$$

En utilisant les formes discrétisées, on obtient alors un système linéaire [84] dont les inconnues sont les déplacements nodaux et les membre droits sont les forces nodales.

$$[\mathbf{K}] \{\Delta \mathbf{u}\} = \{\Delta \mathbf{f}\}. \quad (248)$$

#### Actualisation

La résolution du système linéaire (248) donne à chaque itération les déplacements des nœuds du maillage. Les nouvelles coordonnées des nœuds sont calculées :

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \Delta \mathbf{u}. \quad (249)$$

Ensuite il faut actualiser en chaque point d'intégration toutes les quantités qui dépendent du temps : les densités

<sup>11</sup> Un champ de vitesses virtuelles est un champ tel que  $\delta \mathbf{v} = \mathbf{0}$  sur  $\Sigma_v$ , la frontière du domaine où les vitesses sont imposées

de dislocations sur chaque système, le tenseur des contraintes, l'orientation du réseau et les quantités de glissement. On utilise actuellement essentiellement une méthode d'actualisation qualifiée "d'implicite" selon un schéma proposé initialement par Ortiz. La méthode est détaillée dans [30] et [84]. l'objectif est de partitionner correctement le gradient de transformation entre la partie élastique et la partie plastique. La partie élastique induit la valeur du tenseur de contrainte via la loi de comportement élastique. Les valeurs des composantes du tenseur de contrainte imposent les vitesses de cisaillement à travers la loi d'écoulement. Les glissements sur les systèmes sont à l'origine du gradient de transformation plastique. Ainsi, une surestimation (même très petite) de l'une des parties conduit forcément à une mauvaise actualisation des grandeurs impliquées et conduit à des divergences très importantes plus le calcul progresse. La partition correcte est atteinte lorsque les grandeurs calculées au pas  $n+1$  vérifient strictement la relation :

$$\tau_{n+1}^{(s)} - \tau_{\mu n+1}^{(s)} \left( \frac{\Delta \gamma^{(s)}}{\delta t} \right)^m = 0. \quad (250)$$

Cette relation constitue le point de départ de la méthode d'actualisation.

#### *Code éléments finis*

A partir de ces différents concepts, un code a été développé durant ma thèse et n'a cessé d'évoluer jusqu'à aujourd'hui. Un des principaux avantages de ce code est qu'il est complètement ouvert puisque tous les fichiers sources sont accessibles. Par contre les développements liés à un tel outil sont très coûteux en temps et se font souvent au détriment de l'analyse expérimentale du comportement du matériau. Deux principaux inconvénients limitent l'utilisation du code à des cas relativement simples.

- L'obligation de prendre un petit pas de temps,
- L'impossibilité de prendre en compte des conditions très complexes même si des conditions de type mors mobiles sont utilisables.

Le pas de temps est imposé par la loi d'écoulement qui, avec la valeur très élevée de  $m$  entraîne de très fortes divergences lorsque des erreurs (même petites) sont commises sur l'actualisation des contraintes.

Actuellement les développements se font avec le code ABAQUS dans lequel on programme le comportement du matériau. Ceci a pour effet de reporter les efforts de développements et apporte le bénéfice d'un code performant aux multiples possibilités notamment du point de vue du traitement des conditions aux limites

#### **Conclusion**

Différentes façons d'intégrer les lois de comportement ont été proposées et sont utilisées en fonction du contexte de travail. Ces techniques sont indispensables pour appliquer complètement le modèle à différents cas concrets et comparer résultats numériques et expérimentaux. L'objectif est maintenant de montrer comment on identifie les différents paramètres du modèle en fonction des différents résultats expérimentaux accessibles. Depuis quelques années, les résultats expérimentaux utilisés pour l'analyse du comportement du matériau sont réalisés au laboratoire. Cela implique le développement d'expériences à la fois sophistiquées et délicates ainsi que la maîtrise de différents matériels et protocoles expérimentaux. On donne dans le paragraphe suivant les différents aspects développés et maîtrisés.

#### **4 Obtention de résultats expérimentaux sur monocristaux**

La volonté de maîtriser les protocoles expérimentaux et l'origine des résultats est induite initialement par l'insatisfaction rencontrée lors de tentatives d'utilisation des résultats expérimentaux issus de la littérature. En effet, même s'il existe de nombreuses sources de données (surtout dans les années 60-70), il est malheureusement souvent impossible de connaître les conditions expérimentales associées à de nombreux résultats. Ces conditions expérimentales sont souvent cruciales car elles conditionnent la plupart du temps les résultats obtenus sur les monocristaux. C'est pourquoi, malgré un volant important de résultats déjà publiés, nous avons opté pour la réalisation d'expériences sur les monocristaux (et les agrégats cristallins). L'étude des monocristaux et polycristaux nécessite un recours important à différentes techniques expérimentales que nous avons progressivement maîtrisées au laboratoire. L'étude de la plasticité des monocristaux se fait en provoquant une déformation contrôlée d'une éprouvette calibrée et en enregistrant les différents paramètres associés à cette déformation : effort, déplacement, déformation, orientation... Les procédés d'analyse ainsi que les modes de déformation utilisés sont détaillés dans cette partie. On mentionne également en toute première partie le mode de production des monocristaux qui est le point de départ du processus expérimental.

##### **4.1 Production de monocristaux**

Les monocristaux sont surtout produits à des fins d'identification et de validation du modèle objet de cette étude. Dans un premier temps, ils fournissent les données expérimentales de références pour identifier les lois de



comportement sous des conditions expérimentales complètement maîtrisées. Une fois la loi identifiée, on vérifie son caractère prédictif en comparant les résultats de nouveaux essais pratiqués dans de nouvelles conditions et les simulations. Le modèle est ensuite utilisé par exemple pour prédire le comportement d'agrégats multicristallins.

Ce travail est destiné à améliorer les modèles de comportement de tôles laminées lors d'opérations d'emboutissage. Comme on travaille à différentes échelles, et que l'objectif est de transposer les résultats d'un niveau à un autre, il est impératif de conserver le même matériau lors des différentes analyses. C'est pourquoi le parti a été pris de produire les monocristaux à partir des tôles dont on souhaite finalement modéliser le comportement. La technique utilisée est la recristallisation après écrouissage critique qui fonctionne particulièrement bien sur l'aluminium.

#### *4.1.a Méthode de production par écrouissage critique*

Cette méthode est particulièrement bien adaptée à l'aluminium. Elle nécessite plusieurs étapes. On découpe des échantillons rectangulaires dans la tôle et on les recuit pour effacer toute trace de l'histoire de déformation induite par le laminage. Les conditions du recuit sont choisies pour abaisser autant que possible la densité de dislocations dans le matériau afin d'avoir des conditions initiales toujours identiques. On impose ensuite une prédéformation plastique de quelques pour cent pour emmagasiner de l'énergie dans le matériau. Un recuit de recristallisation provoque ensuite la recristallisation de l'éprouvette. En fonction du taux de prédéformation, les tailles de grains sont plus ou moins importantes. Il existe une valeur de prédéformation critique qui conduit à l'obtention des grains les plus gros. Cette valeur doit être déterminée pour chaque matériau. Dans notre cas, c'est généralement cette prédéformation qui est utilisée de façon à obtenir des grains dans lesquels il est possible de tailler des éprouvettes monocristallines de taille suffisante. Dans ce cas, les grains sont traversants. On utilise également ces éprouvettes à gros grains traversants pour la validation de la loi. Le nombre restreint de grains rend possible une comparaison des résultats expérimentaux et simulés car les volumes de données à traiter ne sont pas trop importants.

#### *4.1.b Précautions, limites*

Les monocristaux (aluminium raffiné par exemple) sont très difficiles à manipuler en raison de leur très faible limite élastique ( $<10$  MPa).

Cette technique de production est très efficace et rapidement opérationnelle. Elle n'est malheureusement pas applicable pour tous les matériaux. Par exemple, les matériaux à structure hexagonale ne recristallisent pas avec cette méthode. Le recours aux traitements thermiques la rend aussi difficilement transposable sur des matériaux avides d'oxygène.

#### *4.1.c Révélation des grains, polissage*

##### Révélation des joints de grains

Il est nécessaire, pour la découpe des monocristaux ou pour connaître la morphologie de l'agrégat de faire apparaître les joints de grains de l'échantillon recristallisé. On utilise une solution chimique dont la composition dépend du matériau à attaquer. Pour l'aluminium, par exemple le produit utilisé est connu sous le nom de réactif de Keller.

##### Polissage

Pour la pratique de la microscopie électronique à balayage avec la technique d'obtention des orientations cristallographiques par analyse des électrons retro-diffusés, il est impératif d'avoir un état de surface aussi plan que possible. Un polissage électro-chimique garantit en un temps très court le meilleur état de surface. Un des problèmes rencontrés est la détermination de la bonne composition du bain électrolytique et la recherche des conditions expérimentales conduisant à un polissage optimal. Le traitement d'échantillons de grandes tailles est nécessaire pour les investigations. Le polissage de ces échantillons est problématique car les appareils proposés pour réaliser les attaques sont dimensionnés pour des tailles d'échantillons relativement petites. On procède alors par des traitements partiels de l'éprouvette avec des recouvrements successifs. Ceci entraîne alors l'existence de raccords plus ou moins francs sur les éprouvettes de grandes tailles.

## 4.2 Les moyens d'analyse

### *4.2.a Mesure des orientations*

L'outil par excellence de la détermination des orientations cristallographique est sans conteste l'analyse des

électrons rétro-diffusés<sup>12</sup> par la surface d'un échantillon placé avec une inclinaison optimale de 70° sous le faisceau d'un microscope à balayage (figure 113). Dans ces conditions les électrons qui frappent la surface repartent en formant des cônes dont la distribution dépend de la structure analysée et de l'orientation cristallographique de l'échantillon par rapport au bâti du microscope.

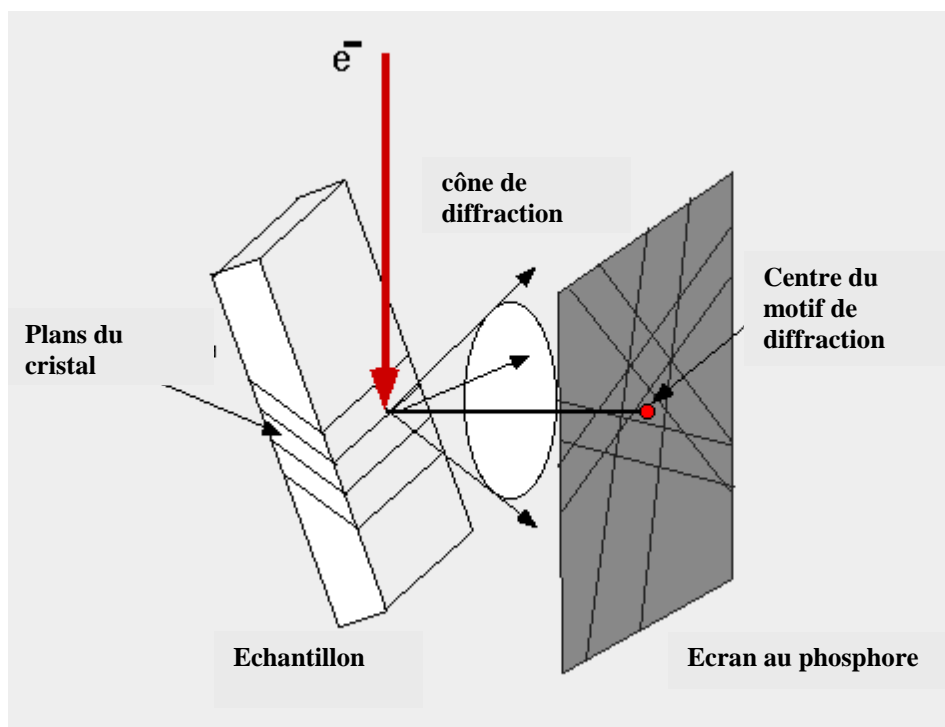


Figure 113 : Diffraction des électrons rétro-diffusés par l'échantillon orienté avec un angle de 70° sous le faisceau incident d'électrons.

Lorsqu'on positionne un écran au phosphore en série avec une caméra CCD, les traces des cônes apparaissent comme des lignes formant un réseau entrecroisé : les lignes de Kikuchi (figure 114). La détection puis l'analyse de ces faisceaux de droites (en réalité des portions de cercles de grands rayons) pratiqué avec un logiciel de dépouillement automatisé donne les orientations de la matière sous le faisceau initial d'électrons.

<sup>12</sup> ou Electron Back Scattered Diffraction (EBSD).

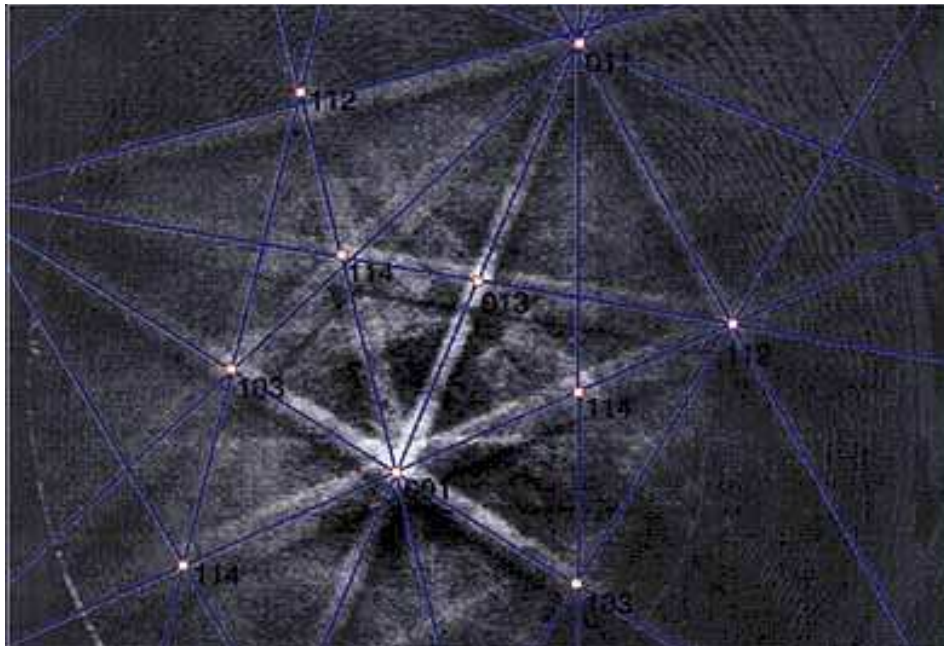


Figure 114 : Exemple de visualisation informatique issu d'un système de traitement des clichés de diffraction.

Le logiciel est également capable de piloter, via la carte d'entrée sortie ad hoc, la platine motorisée du microscope. Cet ensemble d'acquisition et de traitement sur le principe des électrons rétro-diffusé autorise donc la détermination rapide de toutes les orientations nécessaires à la caractérisation de l'éprouvette. Les limites du procédé sont liées à la taille du faisceau et à sa puissance de pénétration dans la matière. En effet, l'interaction du faisceau avec la matière se fait dans un volume sous la surface. Ce volume à la forme de fruit caractéristique s'appelle poire d'interaction. Il impose la taille minimale du volume homogène pour avoir une observation cohérente et limite la taille minimale des grains observables. Par exemple, avec le microscope du laboratoire, il n'est pas possible de mesurer l'orientation pour des grains de taille inférieure à  $10\mu\text{m}$ . Les énergies utilisées pour le faisceau impliquent une très faible pénétration et requièrent un état de surface parfait pour ne pas introduire d'aberrations dues aux défauts de surface. L'analyse des échantillons déformés plastiquement devient plus difficile en raison de la perturbation de réseau provoquée par l'accumulation de dislocations. Les résultats sont alors nettement plus dispersés que dans le cas du matériau recuit et non déformé.

#### 4.2.b Analyse de matériaux

Nous utilisons les moyens disponibles sur le site (Analyse X) pour valider la composition des matériaux testés.

#### 4.2.c Mesure des déformations et des efforts

Au cours de l'essai mécanique, on enregistre la valeur de l'effort appliqué à l'éprouvette et les déformations. L'effort est enregistré par la cellule de force de la machine de test. Tous les échantillons présentent initialement une surface plane suffisamment importante pour pouvoir utiliser l'analyse automatique des déformations présentée dans le 2<sup>ème</sup> chapitre.

##### monocristaux

Pour les monocristaux, les déformations restent homogènes. On pourrait alors envisager de se dispenser d'utiliser cet outil au profit de l'extensomètre. Elle est cependant utilisée pour faire l'acquisition d'informations plus précises lorsque la déformation se localise dans l'éprouvette. Mais c'est surtout son aspect mesure sans contact qui est privilégié. L'extensomètre de la machine de traction doit être supporté par l'échantillon. Cette exigence qui ne pose aucun problème dans le cas d'une éprouvette polycristalline standard est impossible à réaliser pour une éprouvette dont la résistance élastique ne dépasse pas 10 MPa. L'échantillon se déformerait sous le simple effet du poids de l'extensomètre.

##### multicristaux

L'application de cette technique fournit très rapidement des informations sur les champs de déformation très hétérogènes. Ceci est le cas d'agrégats à gros grains où un grain se déforme parfois selon plusieurs zones distinctes. Le seul inconvénient apparaît lorsque la surface de l'échantillon n'est plus tout à fait plane. Ceci se

produit lorsque les déformations plastiques deviennent importantes : en moyenne supérieure à 0,2. La déformation apparente peut alors être plus petite que la déformation réelle. Pour compenser, on applique un traitement sur les données issues de la simulation de façon à les rendre comparables aux résultats expérimentaux obtenus par analyse d'images (Dumoulin [26]). La comparaison complète en 3 dimensions, quant à elle, sera bientôt opérationnelle au laboratoire.

Dans les deux cas, il s'agit d'une application originale de cette technique de détermination des déformations.

#### 4.2.d Analyse des lignes de glissement

Lorsqu'une éprouvette de type monocristallin est déformée, il apparaît en surface des lignes de glissement qui correspondent aux lieux d'émergence des dislocations sur la surface. Comme la déformation s'effectue sur des plans privilégiés, les dislocations ont tendance à émerger régulièrement au même endroit créant des marches de plus en plus marquées avec l'accroissement de la déformation. Ces lignes sont comparées avec les résultats de simulations.

#### 4.2.e Détermination des densités de dislocations

Par des techniques associées à la microscopie électronique en transmission, il est possible de remonter à une évaluation de la densité de dislocations. Cette technique n'est pas maîtrisée au laboratoire, mais fait l'objet de développements au Laboratoire des Propriétés Mécaniques et Thermodynamiques des Matériaux de l'Université de Paris-Nord. Certains de ces travaux concernent des échantillons analysés dans cet ouvrage, mais ne sont pas rapportés.

### 4.3 Les essais mécaniques

#### 4.3.a Essai de traction

On utilise très fréquemment l'essai de traction en raison de sa simplicité de mise en œuvre. Pour chaque éprouvette, on procède à un recuit après découpage, un polissage sur une face puis une orientation (prise en plusieurs points). La seconde face principale de l'échantillon est peinte ensuite en noir et blanc pour créer les motifs nécessaires à l'analyse d'image. On utilise toujours des éprouvettes avec un rapport entre les dimensions transverses et la longueur supérieur à 20. Les extrémités sont maintenues par les mors auto-serrants de la machine. Le montage de l'éprouvette est une des phases les plus délicates il met en jeu des efforts très supérieurs à limite élastique de l'éprouvette.

Durant l'essai, on enregistre les images de la surface peinte ainsi que les efforts. Après démontage, l'orientation cristalline de l'éprouvette est à nouveau mesurée.

#### Essai en température

Le comportement des matériaux métalliques dépend fortement de la température. Nous utilisons les cryothermostats disponibles à l'IUT du Bourget.

L'essai de traction malgré son apparente simplicité génère une situation expérimentale complexe à analyser lorsqu'il est appliqué sur des monocristaux. Des essais complémentaires pourraient être effectués en utilisant d'autres techniques : l'essai de cisaillement par exemple.

#### 4.3.b Micro essais sur les mono et polycristaux

Nous disposons au laboratoire d'une micro presse utilisable dans la chambre du microscope électronique à balayage. Cet essai permet d'appliquer des conditions aux limites complexes sur des éprouvettes mono ou multicristallines. Les essais liés à ce type de matériel ne sont pas développés dans ce rapport.

### Identification de la loi de comportement

Des identifications ont été menées pour le cuivre pur, l'aluminium (pur et très faiblement allié). Des méthodes distinctes indépendantes ont été utilisées afin de valider les valeurs données aux paramètres. On donne ci-après un aperçu des différentes techniques utilisées pour l'identification. Différents paramètres (tableau 12) sont à identifier ou à rechercher pour cet ensemble de relations.

Norme du vecteur de Burgers	$b$	Facteur libre parcours moyen	$K$
Module de cisaillement	$\mu$	Distance annihilation	$\gamma_c$
Matrice d'interaction	$a^{(sq)}$	Matrice d'écrouissage	$d^{(sp)}$

Exposant loi d'écoulement	$m$	Constante loi d'écoulement	$\dot{\gamma}_0^{(s)}$
Densité initiale	$\rho_0$		

Tableau 12 : Paramètres ajustables de la loi de comportement.

### Identification analytique

Avec cette méthode, on est capable d'identifier les paramètres sans faire de recours à des identifications automatiques parfois hasardeuses. Cette première identification fixe un jeu cohérent de valeurs de référence qu'on utilise ensuite comme jeu de départ des identifications automatiques.

#### Identification des coefficients $\dot{\gamma}_0^{(s)}$ et $m$ de la loi d'écoulement

Pour  $m$  et  $\dot{\gamma}_0^{(s)}$ , les relations (206) et (207) fournissent un lien direct avec des constantes physiques dont il faut alors rechercher les valeurs dans la littérature [30]. Dans son rapport de thèse, Fivel calcule les valeurs de  $m$  et  $\dot{\gamma}_0^{(s)}$  en s'appuyant sur les valeurs de la littératures. Pour le cuivre pur, on obtient une valeur de  $\dot{\gamma}_0^{(s)}$  appartenant à l'intervalle  $[7,6.10^{-16}\text{s}^{-1}, 3,4.10^{-6}\text{s}^{-1}]$ . L'imprécision est liée à la difficulté de trouver des valeurs de l'énergie d'activation de l'obstacle.

Le coefficient  $m$  est constant pour les matériaux à structure cubique à face centrée et à température ambiante sa valeur est environ 0,05. Les valeurs ci-dessus indiquent que le glissement à température ambiante s'effectue sans sur-contrainte importante : la valeur de la contrainte appliquée sera toujours proche de la contrainte limite d'écoulement. Comme il avait déjà été signalé, les matériaux à structure cfc ont une très faible dépendance de leur limite élastique par rapport à la température.

#### Identification des matrices d'interaction

Les coefficients de deux matrices de sont à identifier. La matrice  $[d^{(sp)}]$  et la matrice  $[a^{(sp)}]$ . Sans hypothèses particulières, cela représente un nombre important de coefficients (144 par matrice dans le cas des métaux à structure cubique à faces centrées). On restreint donc le nombre de coefficients de chacune des matrices par des considérations d'ordre physique.

#### Cas de la matrice $[d^{(sp)}]$

Cette matrice intervient dans la détermination de la contrainte seuil. On l'a introduite pour distinguer les différents types d'ancrage d'une dislocation dans une population hétérogène de dislocations forêts. Concrètement, on ne distingue la plupart du temps dans les simulations que deux coefficients. Le premier décrit l'effet moyen de la population sur elle-même. Il est lié à l'auto-écrouissage. Le second décrit l'incidence des systèmes de dislocations de type forêt sur le système considéré. Toutes les dislocations forêts sont alors considérées de façon identique. Si on impose une stabilité d'orientation en glissement double, les deux coefficients doivent être identiques [30]. On retrouve alors la relation moyenne  $\tau_\mu^{(s)} = \alpha \mu b \sqrt{\sum_s \rho^{(s)}}$  pour laquelle  $\alpha$  a été identifié

[11,73] et vaut par exemple dans le cas du cuivre 0,3.

#### Cas de la matrice $[a^{(sp)}]$

Les coefficients de cette matrice ont une incidence sur le libre parcours moyen d'un système de glissement. On suppose que le libre parcours moyen dépend de la nature de l'interaction entre les systèmes. Plus l'interaction est forte, plus le libre parcours moyen est limité. L'interaction entre deux dislocations dépend uniquement de la géométrie des deux systèmes (voir équation (169) p.83). Une classification relative à la force des interactions a été proposée la première fois par Franciosi [33] et affinée par Bassani et Wu [8]. La matrice d'interaction est composée de 6 coefficients indépendants. On distingue les interactions entre les dislocations d'un système et :

- le système lui-même (coefficient  $a_0$ ),
- un système colinéaire de même vecteur de Burgers mais de plan de glissement différent (coefficient  $a_1^{col}$ ),
- un système orthogonal de vecteur de Burgers perpendiculaire avec le premier (coefficient  $a_1^{ort}$ ),
- un système coplanaire de même plan de glissement mais de vecteur de Burgers différent (coefficient  $a_1^{cop}$ ),
- un système formant des jonctions glissiles (coefficient  $a_2$ ),

- un système formant des jonctions sessiles ou verrou de Lomer-Cottrell (coefficient  $a_3$ ).

La classification proposée est alors la suivante :  $a_0 < a_1^{col} < a_1^{ort} < a_1^{cop} < a_2 < a_3$ . On utilise une simplification supplémentaire en supposant que les interactions de type colinéaire, coplanaire et orthogonale ont le même effet sur le libre parcours moyen d'un système :

$$a_1 = a_1^{col} = a_1^{ort} = a_1^{cop}. \quad (251)$$

Pour le cuivre par exemple, on choisit de borner les valeurs de la matrice en prenant arbitrairement  $a_3 = 1$  et en appliquant les rapports proposés par Bassani :  $a_0 \ll a_3$ ,  $a_1 = 0,4 a_3$ ,  $a_2 = 0,7 a_3$ . La valeur de  $a_0$  est déterminée par exemple en considérant que la densité de dislocations atteint sa valeur de stabilisation en fin de stade I ( $\dot{\rho}^{(s)} = 0$ ). On obtient alors la valeur de  $a_0$  fonction  $y_c$  et  $K$ .

#### Identification de $y_c$ et $K$

On utilise comme référence un modèle unidimensionnel universel de la courbe de traction de monocristal, capable de décrire un nombre important d'essais pour identifier le modèle granulaire. La modélisation utilisée pour l'identification est celle proposée par Bell [12] [13]. On rappelle succinctement les éléments de la modélisation, puis on montre qu'en utilisant l'intégration analytique du glissement double du paragraphe 0, on peut superposer les deux approches et conduire l'identification des paramètres  $y_c$  et  $K$ .

#### Modélisation de Bell

Bell propose une modélisation unidimensionnelle de la loi d'écrouissage des stades II et III de la courbe  $(\tau, \gamma)$  obtenue en traction. Il suppose l'existence d'une relation parabolique unique entre la contrainte résolue et la déformation sur le système actif dès l'instant où le système est en stade de glissement multiple. La représentation schématique du comportement est donnée sur la figure 115.

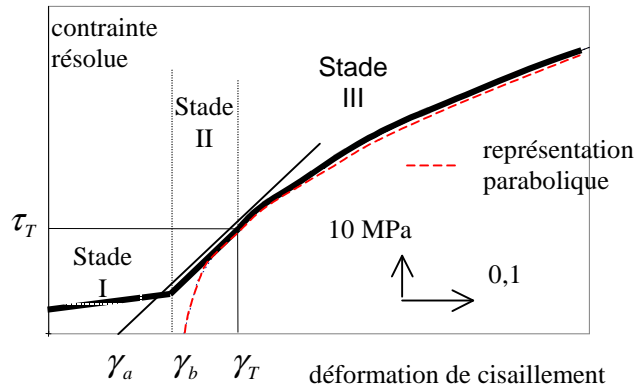


Figure 115 : Représentation schématique de la courbe contrainte résolue en fonction de la déformation du premier système actif dans le cas d'un essai de traction sur monocristal cfc.

La pente de la courbe en stade II est appelée  $\Theta_{II}$ . L'intersection du prolongement de la droite du stade II avec l'axe des abscisses est  $\gamma_a$ . Le point de transition entre le stade II et le stade III est défini par le couple de valeurs  $(\tau_T, \gamma_T)$ . Le constat de Bell, est que le stade III de l'ensemble des courbes d'un monocristal est décrit par l'équation universelle suivante :

$$\tau = \beta_{r0} \left(1 - \frac{T}{T_M}\right) (\gamma - \gamma_b)^{1/2}, \quad (252)$$

$\gamma_b$  est la valeur centrale de l'intervalle  $[\gamma_a, \gamma_b]$ ,  $\beta_{r0}$  est une constante universelle (dépendant du matériau) et  $T_M$  la température de fusion. Pour une température donnée, la courbe contrainte déformation en traction avec une orientation à l'intérieur du triangle standard converge vers une unique parabole. Quel que soit son stade I, l'évolution schématique du stade III est donné figure 116.

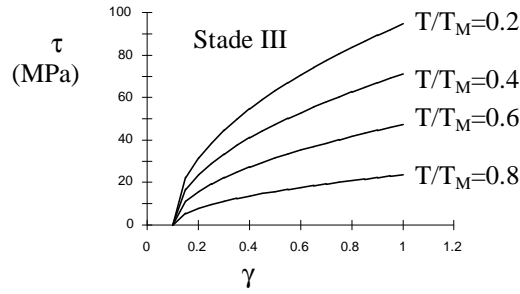


Figure 116 : Evolution schématique du stade III pour un matériau, obtenue en utilisant l'équation descriptive (252) proposée par Bell.

Ce modèle phénoménologique unidimensionnel, dont il a été montré qu'il décrit correctement de nombreux essais, est utilisé pour identifier les paramètres du modèle granulaire appliqué au cas de la traction sur monocristal en glissement double (équation (232)).

On doit alors superposer la courbe des valeurs  $\tau$  en fonction de  $\gamma$  calculées à partir de la relation :

$$\tau = \tau_{sat} \left( 1 - \exp\left(-\frac{y_c}{b} \gamma\right) \right), \quad (253)$$

où  $\tau_{sat}$  et  $y_c$  jouent le rôle de variables ajustables, et le même type de graphe obtenu à partir de la relation (252) proposée par Bell. La superposition est plus facilement obtenue en travaillant avec le carré des expressions (voir figure 117).

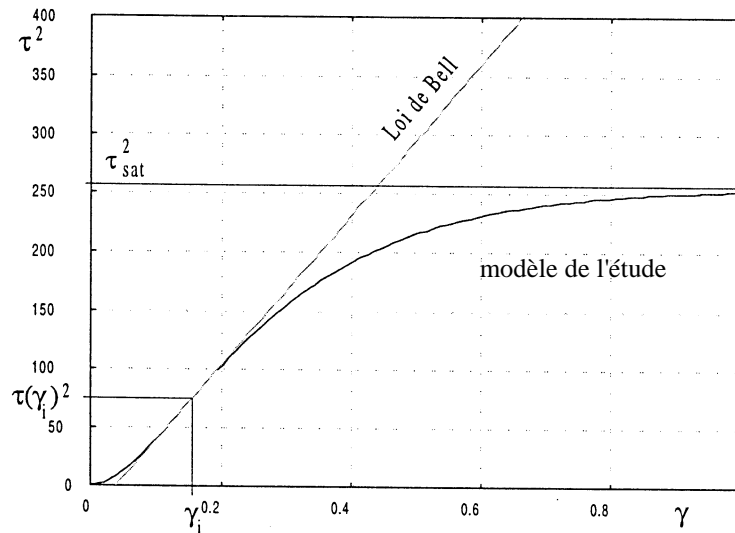


Figure 117 : Courbes obtenues à partir des relations (252) et (253) élevées au carré.

On constate que la superposition est meilleure lorsque les deux courbes sont linéaires, c'est à dire autour du point d'inflexion de la courbe obtenue avec le modèle granulaire. Ce point d'inflexion est obtenu pour :

$$\gamma_i = \frac{b \ln(2)}{y_c}, \quad (254)$$

La valeur de la pente en ce point pour ce même modèle vaut :

$$\left. \frac{d(\tau^2)}{d\gamma} \right|_{\gamma_i = \frac{\ln(2)}{B}} = \frac{\tau^2 y_c}{2b}, \quad (255)$$

Par identification avec la pente de la droite de Bell, et en utilisant la relation (233) qui détermine  $\tau_{sat}$ , on trouve la relation :

$$\frac{y_c}{b} = \frac{\tilde{\alpha}^2 \mu^2}{8K^2 \beta_{r0}^2 (1 - T/T_M)^2}, \quad (256)$$

La valeur expérimentale  $\Theta_{II}$  de la pente en stade II est introduite par le biais de l'équation (234) pour obtenir une relation où  $y_c$  ne dépend plus que de la constante universelle  $\beta_{r0}$  de Bell, de la température  $T$  et  $T_M$  la température de fusion du matériau :

$$\frac{y_c}{b} = \frac{\Theta_{II}^2}{2\beta_{r0}^2 (1 - T/T_M)^2}, \quad (257)$$

L'application au cuivre de cette démarche en considérant les valeurs numériques expérimentales :  $\Theta_{II}=250$  MPa,  $T_M=1355$ K et  $\beta_{r0}=125$  (valeur identifiée par Bell), confère à  $y_c$  la valeur  $3.26b$ . De plus pour le cuivre, la valeur généralement admise pour  $\alpha$  est 0,3. Si on considère les valeurs déterminées au paragraphe précédent pour les coefficients d'interaction, on obtient  $K=36$ .

Ce travail a été réalisé au cours de la thèse de Marc Fivel et a fait l'objet d'une publication [87].

#### *Valeur des paramètres*

Les valeurs des paramètres moyens pour le cuivre, dans le cas d'un trajet de chargement monotone sont alors rassemblées dans le tableau 13.

Norme du vecteur de Burgers	$b$	$2,56 \cdot 10^{-10}$ m
Module de cisaillement	$\mu$	42000 MPa
Matrice d'interaction	$a^{(sq)}$	$a_0=0,003$ $a_1=0,4$ $a_2=0,75$ $a_3=1$
Facteur libre parcours moyen	$K$	36
Distance annihilation	$y_c$	$3,25b$
Matrice d'écrouissage	$d^{(sp)}=\alpha^2$	0,09
Exposant loi d'écoulement	$m$	0,05
Constante loi d'écoulement	$\dot{\gamma}_0^{(s)}$	$[7,6 \cdot 10^{-16} \text{s}^{-1}, 3,4 \cdot 10^{-6} \text{s}^{-1}]$
Densité initiale	$\rho_0$	$10^8 \text{m}^{-2}$

Tableau 13 : Paramètres des relations de comportement identifiés dans le cas du cuivre pur monocristallin.

#### *Utilisation originale de simulations dynamiques du mouvement des dislocations*

Des codes de simulation du comportement individuel des dislocations sont actuellement opérationnels. Ces codes sont situés nettement en dessous de l'échelle de l'étude, puisqu'ils simulent le mouvement de chaque dislocation d'un volume fini. Tous les ingrédients physiques qui concernent les dislocations ont été introduits dans la simulation. On souhaite tester si la forme des lois proposées à l'échelle de la mécanique des milieux continus est confirmée par des simulations judicieusement choisies. On propose dans un premier temps l'analyse des caractéristiques du code de simulation dynamique puis deux exemples d'utilisation possibles pour la vérification de deux relations de la loi de comportement proposée.

#### *L'outil numérique de simulation dynamique des dislocations*

Cet outil de simulation original été développé conjointement par deux équipes de recherche : Kubin et Devincré à l'Onera et Canova et Fivel au laboratoire de Génie Mécanique et Physique de L'INPG.

Dans ce modèle, chaque dislocation est discrétisée en une série de portions coin et vis<sup>13</sup> (Kubin et Canova [53]). Ces segments se déplacent dans un réseau de structure cubique à faces centrées discrétisé. La distance minimale entre deux points de discrétisation est 26 Å. A cette échelle, il est encore possible d'appliquer la théorie de l'élasticité. L'outil numérique inclut tous les mécanismes qui affectent le mouvement d'une dislocation (voir § 0).

<sup>13</sup> Il existe maintenant une version du code où les segments sont discrétisés au moyen de segments mixtes.



Ainsi le code est construit en incorporant le mécanisme de Frank-Read. Il tient compte des effets de tension de ligne. Il est capable de reproduire la formation de jonction ou de faire dévier des dislocations vis. Un exemple d'utilisation qui montre l'efficacité de cet outil est l'application de conditions aux limites spécifiques pour reproduire le comportement d'un cristal massif (Fivel et al [32]). Dans les parties suivantes on montre les grands principes de la simulation dynamique du mouvement des dislocations afin de mieux en cerner la "philosophie" sous-jacente et comprendre l'exploitation qui en est proposée pour l'identification du modèle de l'étude.

Les mécanismes impliqués dans l'évolution des densités de dislocations

Dans le code de simulation dynamique, deux mécanismes fondamentaux qui modifient la densité de dislocations sont utilisés : la multiplication et l'interaction de deux dislocations (pouvant éventuellement conduire à leur annihilation). La multiplication des dislocations est simulée sur le principe du mécanisme de Frank-Read. Un segment ancré à deux extrémités se courbe lorsqu'une contrainte lui est appliquée. Dans ce cas le nombre de segment pour décrire la ligne augmente, ce qui a pour conséquence d'accroître la densité de dislocations. Chaque segment balaye alors une aire dans laquelle on recherche les interactions potentielles avec d'autres dislocations. Suivant le type d'interaction, deux familles d'obstacles sont considérées.

- Les interactions coplanaires : les segments avec le même vecteur de Burgers s'annihilent si leurs signes sont opposés ou s'immobilisent à une distance fixée de l'un de l'autre s'ils ont le même signe.
- Les interactions non-coplanaires : en utilisant un critère énergétique, des jonctions sont générées et peuvent être détruites si la contrainte appliquée est au-dessus d'une certaine valeur (Devincere et Kubin [24]).

Plusieurs grands principes sont utilisés dans le code. Ils sont détaillés dans les paragraphes suivants.

Champ de contrainte sur un segment de dislocation

La cinétique d'un segment de dislocation est déterminée par la connaissance de la contrainte résolue effective sur ce segment. Dans la simulation dynamique, quatre contributions différentes sont additionnées pour obtenir cette contrainte.

- Les conditions aux limites appliquées à l'échantillon. Dans le cas d'un cristal massif, le tenseur de contrainte  $\sigma_{app}$  est supposé identique sur tout le volume.
- La friction de réseau due aux forces de Peierls qui agissent sur le segment de dislocation. Le segment ne peut se déplacer si la contrainte de cisaillement qui lui est appliqué est plus petite que la contrainte  $\tau_{peierls}$ .
- Le champ de contrainte autour d'une dislocation. Le champ de contrainte interne  $\sigma_{dis}$  appliqué au segment est la somme de tous les champs de contrainte de chaque segment de dislocation à l'intérieur du cristal.
- La tension de ligne qui tend à minimiser l'énergie élastique de la dislocation. On la représente par une contrainte résolue de cisaillement  $\tau_{ll}$ .

Finalement, la contrainte résolue effective  $\tau_{eff}$  qui s'exerce sur un segment de direction de glissement normalisée  $\mathbf{g} = \mathbf{b}/\|\mathbf{b}\|$  et de vecteur de ligne unitaire  $\mathbf{l}$  est obtenue en faisant la somme des contraintes déterminées ci-dessus :

$$\begin{aligned}\tau_{eff}^i &= \left\{ (\sigma_{app} - \sigma_{dis}) \mathbf{g} \right\} \wedge \mathbf{l} \cdot \mathbf{g} + \tau_{\mu} \\ \tau_{eff} &= \tau_{eff}^i - \text{signe}(\tau_{eff}^i) \tau_{peierls}\end{aligned}\quad (258)$$

Le cadre physique de cette modélisation est donc complètement compatible avec celui du modèle physique.

Cinétique du segment de dislocation

La vitesse d'un segment de dislocation est calculée en appliquant le principe fondamental de la dynamique à un segment unitaire de masse  $m_{su}$  [79] :

$$\mathbf{F}_a - \mathbf{F}_v = m_{su} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \quad (259)$$

où  $\mathbf{F}_a$  est la force effective par unité de longueur sur le segment de dislocation considéré :  $\mathbf{F}_a = \tau_{eff} \mathbf{b}$ . La force dissipative  $\mathbf{F}_v$  est provoquée par le frottement visqueux, en première approximation, de la dislocation sur le réseau. La force dépend donc linéairement du vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  :  $\mathbf{F}_v = B \mathbf{v}$ . Le coefficient  $B$  est le coefficient de frottement visqueux sur le réseau. L'équation (259) est alors reformulée sous forme d'équation différentielle

ne faisant intervenir que la vitesse :

$$\tau_{eff} \mathbf{b} - B\mathbf{v} - m_{su} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0 \quad (260)$$

qui possède la solution suivante :

$$\mathbf{v} \xrightarrow{t} \mathbf{v}(t) = \frac{\tau_{eff} \mathbf{b}}{B} \left( 1 - \exp\left(-\frac{tB}{m_{su}}\right) \right). \quad (261)$$

La valeur de saturation de la vitesse est obtenue lorsque  $t$  tend vers l'infini :

$$\mathbf{v}(\infty) = \frac{\tau_{eff} \mathbf{b}}{B}. \quad (262)$$

La constante de temps  $m/B$  est petite devant le pas de temps utilisé dans la simulation. La valeur de saturation est imposée dès que le segment est en situation de glissement.

Calcul du taux de cisaillement

Quand un segment de dislocation de longueur  $L$  se déplace à une vitesse  $V$  pendant un temps  $\delta t$ , l'aire balayée  $dA$  est déterminée par :

$$dA = Lv\delta t = \frac{L\tau^* b \delta t}{B}, \quad (263)$$

où  $\tau^*$  est la contrainte résolue effective,  $b$  l'amplitude du vecteur de Burgers et  $B$  le coefficient de frottement visqueux de la dislocation sur le réseau. Le glissement sur un système est alors calculé sur le volume  $V$  d'une sphère représentative avec la formule :

$$d\gamma^{(s)} = \frac{bdA}{V}. \quad (264)$$

Avec ces règles fondamentales, il est alors possible, pour une simulation donnée d'enregistrer l'évolution de la densité totale de dislocations sur un système en fonction de la quantité de glissement accumulé.

#### *Utilisation de la simulation pour modéliser la loi d'évolution des densités de dislocations*

On souhaite vérifier la loi d'évolution des dislocations proposée pour le modèle granulaire (équation (190)) dans le cas du cuivre en utilisant une simulation dynamique spécifique. On rapporte précisément la procédure utilisée afin notamment de mettre en évidence les difficultés qu'il y a à coupler deux échelles différentes. On considère un cisaillement sur le système B4 :  $(111)[\bar{1}0\bar{1}]$ . Les dislocations forêts des autres systèmes sont artificiellement maintenues immobiles pour que leur densité reste constante durant la simulation. La boîte de simulation est un cube de  $15\mu\text{m}$  de côté et les calculs de la densité et du cisaillement accumulé sont effectués sur une sphère de  $5\mu\text{m}$  de rayon, centrée à l'intérieur du cube. Au départ, les segments sont aléatoirement répartis dans le cube. Ils sont artificiellement ancrés à leurs deux extrémités pour pouvoir obtenir une activation du mécanisme de Frank-Read sous l'action de la contrainte de cisaillement appliquée. Avec cette configuration, l'évolution de la densité de dislocation sur B4 en fonction du cisaillement accumulé est donnée sur la figure 118.

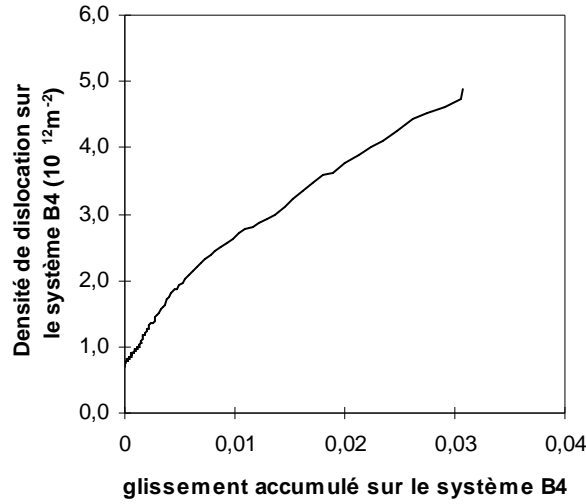


Figure 118 : Densité de dislocations en fonction du glissement accumulé sur le système B4.  
Résultat d'une simulation dynamique du comportement des dislocations.

L'identification des coefficients macroscopiques se fait à partir de l'équation (190). Les coefficients de la matrice  $[a^{(sp)}]$  sont supposés être ceux du tableau 13. Dans le cas présent, on identifie seulement les coefficients  $K$  et  $y_c$ . Pour le système B4, la loi d'évolution de la densité de dislocations est écrite sous une forme différente pour simplifier l'identification :

$$\frac{\dot{\rho}^{(s)}}{\rho^{(s)}} = \frac{1}{bK} \left( \frac{\sqrt{\sum a^{(sq)} \rho^{(q)}}}{\rho^{(s)}} \right) - \frac{2y_c}{b} \quad (265)$$

Lorsqu'on utilise les égalités suivantes :

$$y = \frac{\dot{\rho}^{(s)}}{\rho^{(s)}} \text{ et } x = \frac{\sqrt{\sum a^{(sq)} \rho^{(q)}}}{\rho^{(s)}}, \quad (266)$$

reportées dans l'équation précédente, on obtient la forme linéarisée :

$$y = \frac{x}{bK} - \frac{2y_c}{b} \quad (267)$$

La pente de la droite correspondante est  $1/bK$  et l'ordonnée à l'origine correspondante est  $-2y_c/b$ . En utilisant la transformation de l'équation (266), la courbe de la figure 118 est retracée figure 119.

On obtient alors une droite de pente 104 850 000 et d'ordonnée à l'origine -2. L'utilisation de ces valeurs dans l'équation (267) donne  $K = 37$  et  $y_c = b$ .

La valeur obtenue pour  $K$  est bon agrément avec les mesures expérimentales et les autres identifications. Cependant, la valeur de  $y_c$  est plutôt petite en comparaison avec les valeurs expérimentales (typiquement, la valeur de  $y_c$  est  $3,26b$  à la température ambiante). Ceci peut être dû à une imprécision importante sur la détermination de l'intersection à l'origine. En effet, un léger changement sur la pente de la droite, dans cette même configuration conduit à des variations importantes sur la valeur. Néanmoins l'ordre de grandeur de la valeur obtenue est le bon. Ce travail valide dans les deux sens, d'une part le code de simulation, d'autre part la forme de la loi adoptée. Ce travail a été réalisé pendant la thèse de Marc Fivel et a fait l'objet d'une publication [86].

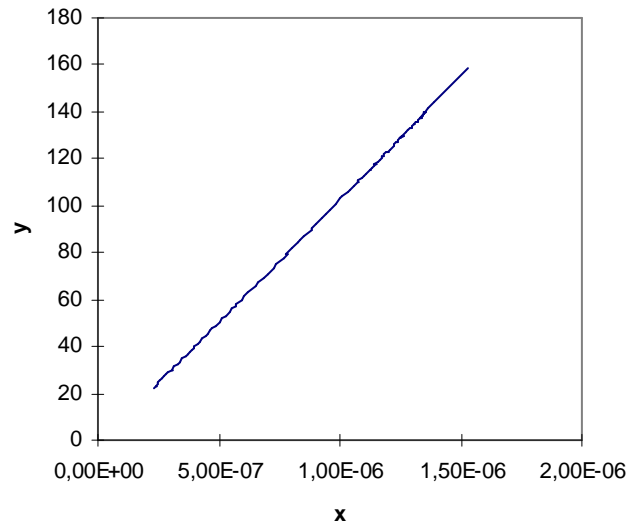


Figure 119 : Courbe de la figure 118 modifiée en utilisant les changements de variables de l'équation (266). L'allure du tracé est une droite de pente  $1/bK$  et d'ordonnée à l'origine  $-2y_c/b$ .

#### Utilisation du code de simulation dynamique pour confirmer la forme de contrainte seuil

On souhaite utiliser la simulation dynamique pour vérifier l'expression proposée pour les contraintes seuil. Même s'il apparaît difficile de déterminer l'origine physique précise de cette contrainte, la définition initiale adoptée pour cette dernière donne le principe à utiliser pour mettre au point une simulation qui permette de vérifier la forme adoptée pour la relation (210), toujours dans le cas du cuivre. Cette contrainte s'apparente à une contrainte limite pour laquelle le glissement macroscopique est observé.

Pour retrouver numériquement cette valeur avec le code de simulation, on applique progressivement une contrainte de cisaillement sur un système particulier. on doit alors rechercher la valeur limite qui provoque un écoulement permanent sur le système actif sans effet visqueux. La détermination de cette valeur est obtenue en fonction de différentes densités de dislocations forêts imposées dans la simulation. Le problème déjà mentionné est alors le nombre élevé de coefficients à identifier si on considère la matrice  $[d^{(sp)}]$  sans faire d'hypothèse : 144 dans le cas d'une structure cfc. Dans cette analyse, on restreint à 4 les coefficients indépendants pour générer complètement cette matrice. On suppose que ces coefficients dépendent uniquement du type d'interaction. Par exemple si le système B4 (111)[ $\bar{1}$ 01] interagit avec les systèmes B4 (lui-même), C3, C5 ou C1, tous les types d'interaction sont obtenus, caractérisés par les quatre coefficients  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  et avec le classement  $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ . La démarche numérique tentée ici consiste à disposer aléatoirement des segments appartenant au système B4 sur lequel on applique une contrainte de cisaillement croissante.

Les segments sont artificiellement ancrés à leurs deux extrémités. Chacun d'entre eux se comporte comme une source pour reproduire le mécanisme de Frank-Read quand la contrainte est suffisante. Pour créer un effet de dislocations forêts, on introduit pour chaque simulation, une densité de dislocations artificiellement immobiles sur les systèmes mentionnés ci-dessus, présentant une interaction représentative avec le système B4. Pour chaque système différent, deux densités de dislocation testées :  $\rho_{F0} = 7 \times 10^{11} \text{m}^{-2}$  et  $\rho_{FI} = 1.4 \times 10^{12} \text{m}^{-2}$ . La densité initiale de B4 (qui va évoluer au cours du temps) est, quant à elle, fixée à  $\rho_p = 7 \times 10^{11} \text{m}^{-2}$ . Au moment où a été menée cette étude, la durée de simulation est d'environ 15 jours sur une station de travail de l'époque (HPC110 cadencée à 175 MHz). De plus, l'augmentation naturellement importante du nombre de segments sur le système actif avec la déformation accroît drastiquement le temps de calcul par pas et la simulation doit finalement être arrêtée (figure 120).

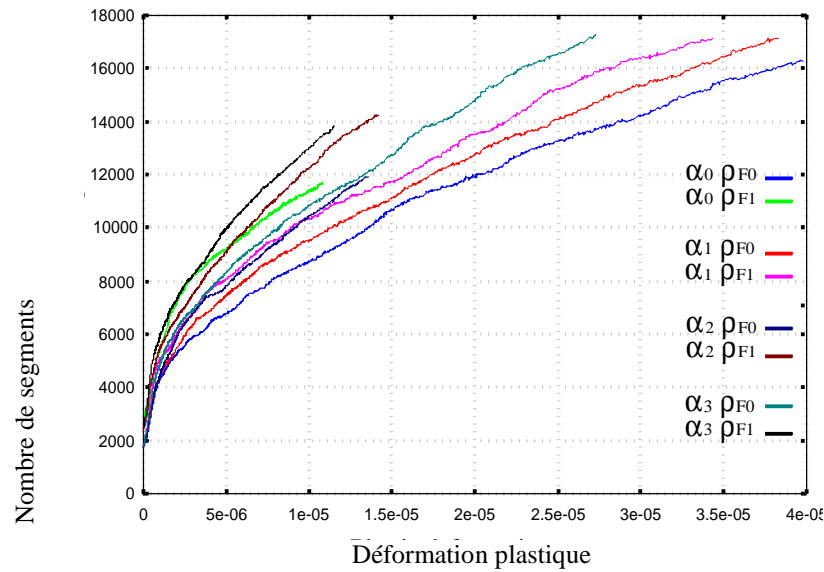


Figure 120 : Résultat numérique pour l'évolution du nombre segments sur le système B4 en fonction du glissement accumulé sur ce même système. Chaque courbe est obtenue avec une densité et un type de dislocations forêts différents.

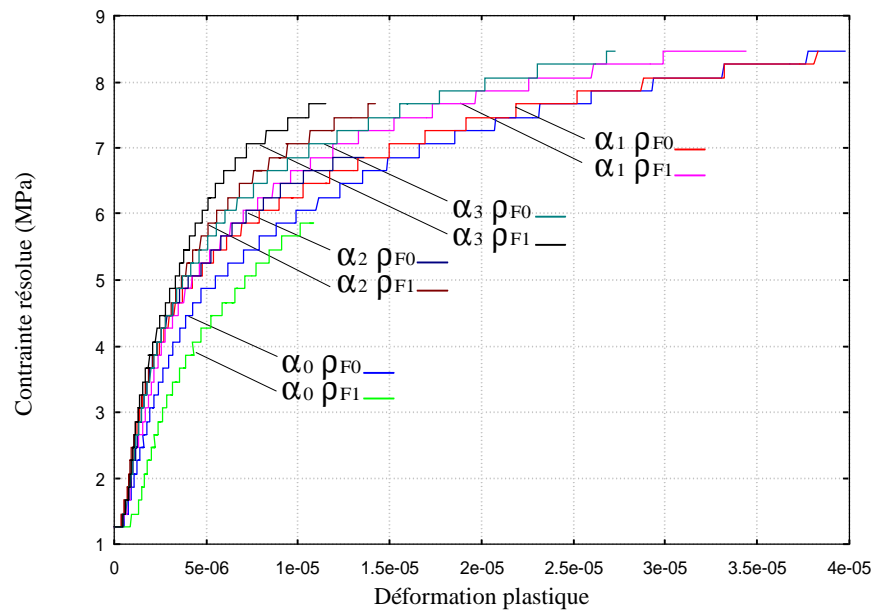


Figure 121 : Evolution de la contrainte appliquée en fonction de glissement accumulé sur le système B4. Chaque courbe est obtenue avec une densité et un type de dislocations forêts différents.

Les résultats de simulation sont obtenus pour de faibles déformations lorsque les segments de dislocations du système B4 commencent leur glissement mais n'ont pas encore couvert la totalité de leur libre parcours moyen. Pratiquement, le comportement en écoulement stationnaire n'est jamais atteint en raison du durcissement qui s'opère conjointement à toute déformation. En faisant néanmoins l'hypothèse que ce durcissement est malgré tout négligeable, l'extrapolation de la valeur de contrainte d'écoulement est envisageable à partir des courbes proposées ici. Sur la figure 121, ont été reportées les évolutions de la contrainte appliquée en fonction du glissement accumulé sur le système B4. L'objectif est donc de déterminer les valeurs seuil  $\tau_{\mu}^{(s)}$  qui correspondraient dans chaque configuration à un écoulement stationnaire. Pour chaque courbe, la meilleure description analytique de la portion de courbe déjà décrite par la simulation est obtenue avec l'équation :

$$\tau^{(s)} = \tau_{\mu}^{(s)} (1 - \exp(-a_1 \sqrt{\gamma^{(s)}})) , \quad (268)$$

Cette relation est purement phénoménologique et ne correspond, bien entendu, à aucune loi de comportement. La procédure suivante est utilisée pour extraire  $\tau_{\mu}^{(s)}$  à partir des données. La notation  $X^{(s)} = \sqrt{\gamma^{(s)}}$  est adoptée pour exprimer la relation (268) :

$$\theta^{(s)} = \frac{\partial \tau^{(s)}}{\partial X} = a_1 \tau_{\mu}^{(s)} \left( 1 - \frac{\tau^{(s)}}{\tau_{\mu}^{(s)}} \right) \quad (269)$$

Lorsqu'on trace le graphe représentatif de  $\theta^{(s)}$  en fonction de  $\tau^{(s)}$ , l'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses correspond à  $\tau_{\mu}^{(s)}$ . Cette procédure est appliquée à chaque simulation pour donner les valeurs de  $\tau_{\mu}^{(s)}$  reportés dans le tableau 14.

$\rho_F [m^{-2}]$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
$7 \times 10^{11}$	9.8 MPa	9.6 MPa	8.1 MPa	9.4 MPa
$1.4 \times 10^{12}$	9.6 MPa	9.5 MPa	8.7 MPa	10 MPa

Tableau 14 : Valeur de  $\tau_{\mu}^{(s)}$  pour les huit simulations différentes.

Il faut maintenant extraire la valeur de la densité de dislocations correspondant aux valeurs estimées de  $\tau_{\mu}^{(s)}$ . Une nouvelle relation phénoménologique est utilisée pour décrire la courbe entre la contrainte (voir exemple figure 122) et la densité de dislocations :

$$\rho^{(s)}(\tau^{(s)}) = \rho_0 + a_2 \exp(b \cdot \tau^{(s)}) , \quad (270)$$

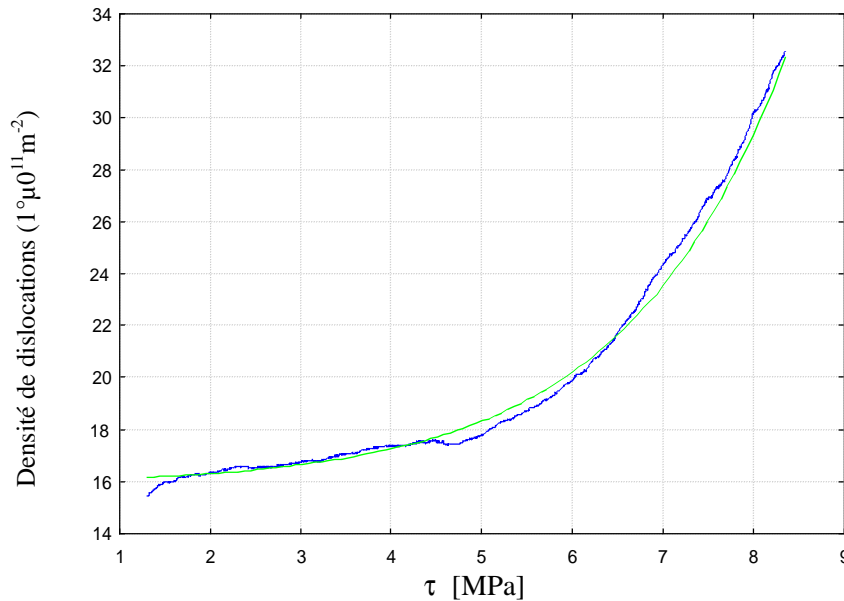


Figure 122 : Densité de dislocations totale en fonction de la contrainte pour la simulation concernant le coefficient  $\alpha_0$  et la densité forêt  $\rho_{F0}$ . Courbe foncée : données simulées, courbe claire : données interpolées par l'équation (270).

Cette procédure est appliquée à chaque simulation et les résultats sont reportés dans le tableau 15.

$\rho_F [m^{-2}]$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
$7 \times 10^{11}$	$46 \times 10^{11} m^{-2}$	$43.3 \times 10^{11} m^{-2}$	$23.3 \times 10^{11} m^{-2}$	$36 \times 10^{11} m^{-2}$

$1.4 \times 10^{12}$	$34.3 \times 10^{11} \text{m}^{-2}$	$36.8 \times 10^{11} \text{m}^{-2}$	$22.8 \times 10^{11} \text{m}^{-2}$	$36 \times 10^{11} \text{m}^{-2}$
----------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	-----------------------------------

Tableau 15 : Valeur des densités à l'écoulement stationnaire pour les différentes simulations.

Le coefficient de durcissement latent  $\alpha_0$  est directement déduit des données des tableaux 14 et 15 reportées dans l'équation (210). Les deux valeurs de dislocations forêt donnent l'intervalle [0,156 , 0,165] pour  $\alpha_0$ . La valeur 0,16 est adoptée pour les calculs suivants. Il est remarquable que  $\sqrt{\alpha_0}=0,4$  qui n'est pas très éloignée de la valeur expérimentale généralement admise pour  $\alpha$  dans la relation (177). On utilise les densités de dislocations imposées de forêts pour calculer autres coefficients  $\alpha_i$  à partir de la relation (210) selon la même procédure. Toutes les valeurs obtenues sont reportées dans le tableau 16.

$\rho_F [\text{m}^{-2}]$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
$7 \times 10^{11}$	0.16	0.15	0.27	0.27
$1.4 \times 10^{12}$	0.16	0.14	0.21	0.21

Tableau 16 : Différentes valeurs de  $\alpha_i$  obtenues pour chaque simulation.

Les valeurs sont au moins qualitativement en bon agrément avec les résultats expérimentaux habituels :  $0,4 < \sqrt{\alpha_i} < 0,5 \quad \forall i$ . Cela montre également qu'il est possible de prendre dans le cas du cuivre en chargement monotone les mêmes valeurs pour les coefficients de la matrice  $[d^{(sp)}]$ . Ce travail a été effectué pendant la thèse de Marc Fivel et a fait l'objet d'une publication [31].

#### Conclusions sur l'utilisation du code dynamique

On a utilisé le code de simulation dynamique pour vérifier la forme des lois proposées pour l'évolution de la densité de dislocation en fonction de la vitesse de déformation et pour la détermination des contraintes seuil.

Les deux démarches de validation à partir de simulations numériques fournissent des valeurs cohérentes avec les autres identifications des paramètres du modèle granulaire menées par ailleurs. Ceci valide la forme donnée aux équations de modèle et, réciproquement, le code de simulation dynamique.

La deuxième série de simulation valide le sens attribué à la contrainte seuil athermique. Comme la physique introduite dans le code de simulation dynamique de l'évolution des dislocations est la même que celle qui conduit aux équations du modèle, la contrainte athermique est contrôlée par un mécanisme de dislocation forêt dans les deux cas. Il n'est pas aberrant de retrouver les mêmes résultats.

Dans les deux cas, le code de simulation de dislocations atteint ses limites. Dès l'instant où le nombre de segments devient trop important, la simulation devient très longue. La déformation plastique maximale atteinte est de l'ordre de 2 à 3%. Ceci met en évidence la difficulté spécifique aux transitions multi échelles. A une échelle donnée, il est très difficile d'extraire des données pour transmettre à une autre échelle.

#### Identification avec SiDoLo

Le logiciel SiDoLo est un outil d'identification qui permet lorsque l'on souhaite confronter un modèle à des résultats expérimentaux, une estimation des paramètres de ce modèle. Le principe en est le suivant. On dispose d'une part, d'une série de résultats expérimentaux et d'autre part un modèle de comportement formulé avec différents paramètres ajustables. La résolution du problème d'identification des paramètres du modèle consiste alors en la minimisation d'une fonctionnelle, qui mesure, pour un jeu de paramètres donné, l'écart entre la prévision du modèle et les résultats expérimentaux (figure 123). L'objectif est de déterminer le jeu de paramètres qui conduit à un écart minimum. Le logiciel SiDoLo utilise pour cette optimisation les algorithmes classiques de minimisation.

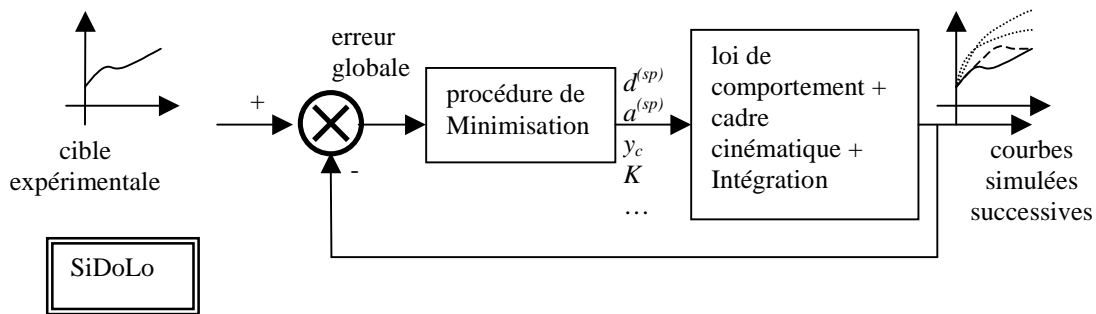


Figure 123 : Schéma de la procédure d'optimisation des paramètres en utilisant SiDoLo.

Dans cette partie, on souhaite identifier les paramètres du modèle en utilisant les résultats d'essais de traction sur monocristaux avec différentes orientations. L'ajustement sera réalisé de façon automatique par le logiciel SiDoLo couplé avec l'outil de simulation MiniSim. L'analyse est effectuée pour l'aluminium monocristallin.

#### Procédure expérimentale

Les essais doivent être réalisés sur des monocristaux. Les matériaux qui sont utilisés dans le cadre des opérations de recherche au laboratoire sont essentiellement des matériaux en feuilles. Le matériau pour lequel l'identification du modèle est requise est l'aluminium de pureté 99,5%. La méthode qui a été retenue pour obtenir des monocristaux est celle qui permet de travailler sur des monocristaux issus directement des tôles. Cette technique est la recristallisation par écrouissage critique.

Au départ, les échantillons sont découpés dans de la tôle laminée. En appliquant la méthode de l'écrouissage critique, des grains de taille centimétriques sont obtenus pour ce matériau. Les échantillons monocristallins sont ensuite découpés dans les grains les plus gros. Typiquement, la taille des éprouvettes est  $0,8 \times 2,5 \times 30 \text{ mm}^3$ . L'orientation cristallographique initiale est déterminée avec un diffractomètre 4 cercles.

Les essais de traction sont réalisés sur la machine Instron<sup>TM</sup> du laboratoire. Les conditions aux limites sont imposées par un système de mâchoires avec mors rigides auto-serrants. La mâchoire supérieure présente une liaison rotule avec la traverse. La vitesse de traverse est fixée à 1 mm/min.

On utilise l'outil de détermination des mesures déformations. Pour chaque cristal testé, on extrait la courbe contrainte vraie-déformation logarithmique de la zone de déformation homogène de l'éprouvette en utilisant l'effort enregistré sur la cellule de la machine de traction et la mesure de déformation automatisée.

Les courbes expérimentales sont données sur la figure 124.

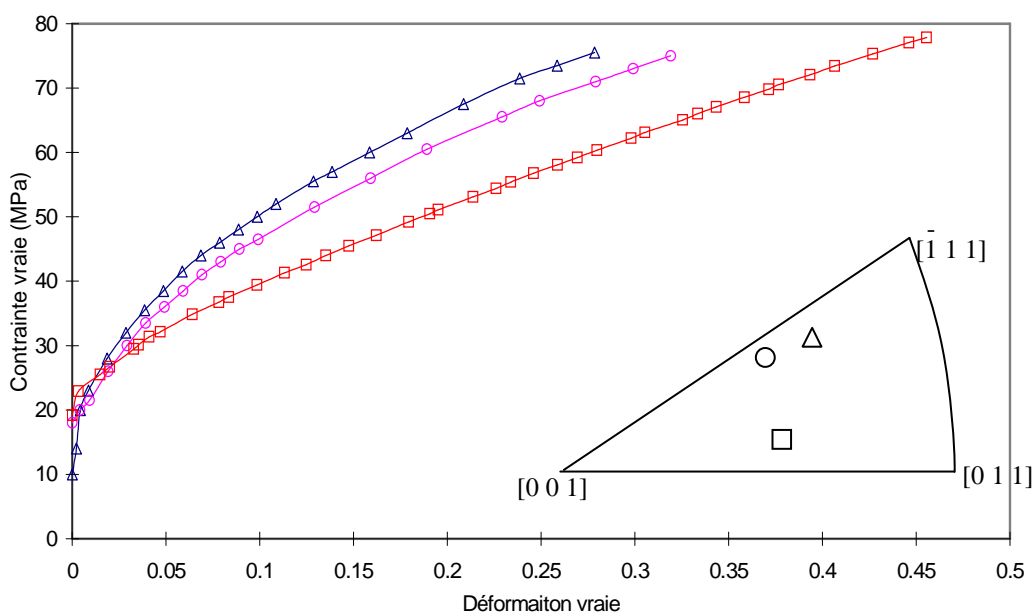


Figure 124 : Contrainte vraie – déformation vraie pour trois monocristaux Al 99,5% avec trois orientations initiales différentes par rapport au repère cristallin de l'axe de traction.



### Identification du modèle

Afin de diminuer le nombre de paramètres ajustables, on réduit les paramètres à identifier. Les interactions sur un système sont supposées être exclusivement de deux types : soit celles provoquées par les dislocations du système lui-même (auto écrouissage) soit celles provoquées par les dislocations des autres systèmes (écrouissage latent). Deux coefficients suffisent alors pour obtenir la matrice d'interaction de la relation (210). On désigne par  $\alpha_p$  les termes  $d^{(pp)}$  et  $\alpha_f$  tous les termes  $d^{(sp)}$  avec  $s \neq p$ . Le même processus est appliqué à la matrice  $[a^{(sp)}]$  de la relation (190), pour laquelle on distingue 4 types d'influence sur le libre parcours moyen en fixant 4 coefficients indépendants :  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  pour décrire la matrice (selon la classification de Franciosi). En ce qui concerne les paramètres de l'équation (205), la valeur de  $m$  est évaluée à 0,005 par des essais de traction avec sauts de vitesse. La valeur de  $\dot{\gamma}_0$  vaut  $7.5 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ . La densité de dislocations initiale  $\rho_0$  est ajustée à partir de la limite élastique expérimentale mesurée. La valeur du module du vecteur de Burgers est  $2,86 \times 10^{-10} \text{ m}$  et le module de cisaillement moyen est fixé à 24 400 MPa. Il reste donc 8 paramètres à ajuster pour obtenir la description des trois essais par le modèle ( $\alpha_p$ ,  $\alpha_f$ ,  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $y_c$  et  $K$ ).

Les paramètres à déterminer sont ajustés par SiDoLo. Les valeurs numériques identifiées sont données dans le tableau 17.

$\alpha_p$	$\alpha_f$	$\dot{\gamma}_0 \text{ (s}^{-1}\text{)}$	$m$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$K$	$y_c$	$\rho_0 \text{ (m}^{-2}\text{)}$
0,3	0,07	$7,5 \cdot 10^{-6}$	0,05	0,2	0,8	0,8	1	57	5.b	$1 \cdot 10^{12}$

Tableau 17 : Valeurs numériques des paramètres du modèle de l'étude pour de l'aluminium de pureté 99,5%, obtenues après optimisation par SiDoLo sur les essais de traction de la figure 124.

Les valeurs obtenues sont en bon accord avec les données de la littérature. La faible valeur de  $m$  montre que le matériau est peu sensible à température ambiante aux changements de la vitesse de déformation [10] et [55]. La valeur de la densité initiale de dislocations dépend beaucoup des conditions expérimentales. Un monocristal d'aluminium est en effet très délicat à manipuler en raison de sa faible limite élastique. La valeur déterminée correspond aux valeurs généralement admises [52] et [70]. Le coefficient d'auto durcissement est compris entre 0,2 et 0,5 conformément aux résultats de [70].

Pour valider ces résultats d'identification le modèle identifié est utilisé pour simuler un cas de la littérature. Lücke et Lange [59] ont proposé une série d'expériences sur des monocristaux d'aluminium de même pureté que celui de cette étude. L'orientation initiale de l'axe de traction est  $[5,9,20]$ . L'outil numérique d'intégration est utilisé pour produire la courbe simulée de la traction sur ce monocristal. Seule la densité initiale de dislocations a été changée  $0,3 \times 10^{12} \text{ m}^{-2}$  pour obtenir la même limite élastique dans le cas simulé et le cas expérimental. De façon remarquable, la confrontation des résultats figure 125 montre une bonne superposition des courbes simulée et expérimentale.

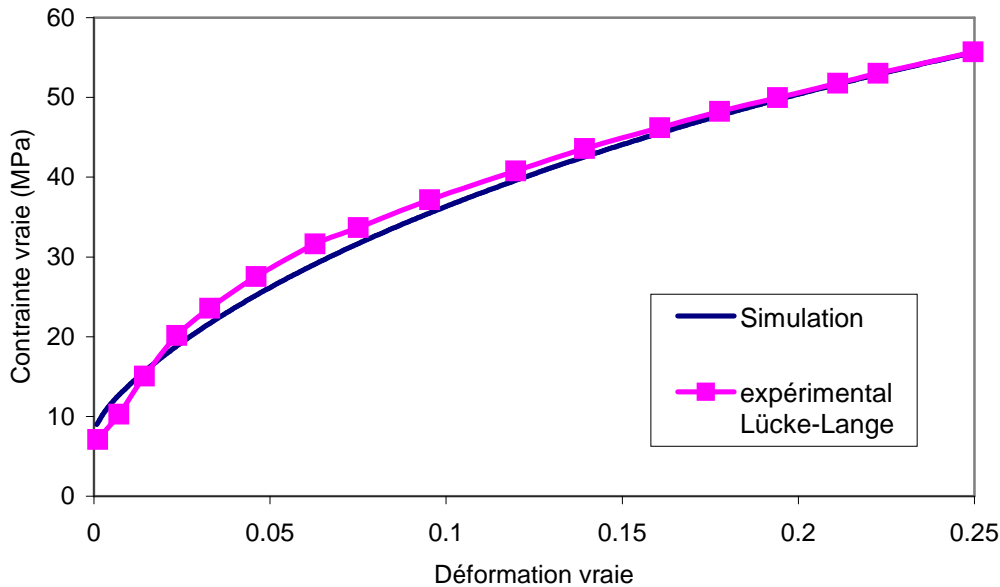


Figure 125 : Courbes contrainte déformation d'un essai de traction sur une éprouvette monocristalline d'aluminium 99,5%. Comparaison entre les données expérimentales [59] et simulées.

Plusieurs points sont également dignes d'intérêt. Le premier point est la valeur importante relative du coefficient d'auto-durcissement  $\alpha_p = 0,3$  par rapport au coefficient de durcissement latent  $\alpha_f = 0,07$ . Dans le cas des métaux purs, ces coefficients sont au mieux égaux sinon  $\alpha_f > \alpha_p$ . Le deuxième point porte sur les conséquences qui en découlent. On constate expérimentalement et numériquement que le stade I n'apparaît pas. Ceci est expliqué par le fait que le système qui s'active est très fortement écroui et qu'il a tendance à se bloquer. En fait cela condamne les systèmes primaire et secondaire à être simultanément actifs. Cette analyse est confirmée si on trace le graphe du glissement sur le système secondaire  $\gamma^s$  en fonction du glissement sur le système primaire  $\gamma^p$  (figure 126).

Un autre point également d'importance est la non prise en compte de l'écrouissage cinématique au niveau de la loi de comportement plastique. L'auto-blocage des dislocations du système actif pourrait s'expliquer si on introduit cette composante supplémentaire au niveau de la contrainte résolue. Il reste cependant à justifier le fait que les dislocations d'un système et dans un monocristal restent captives au point de générer des agrégats et des contraintes importantes en retour.

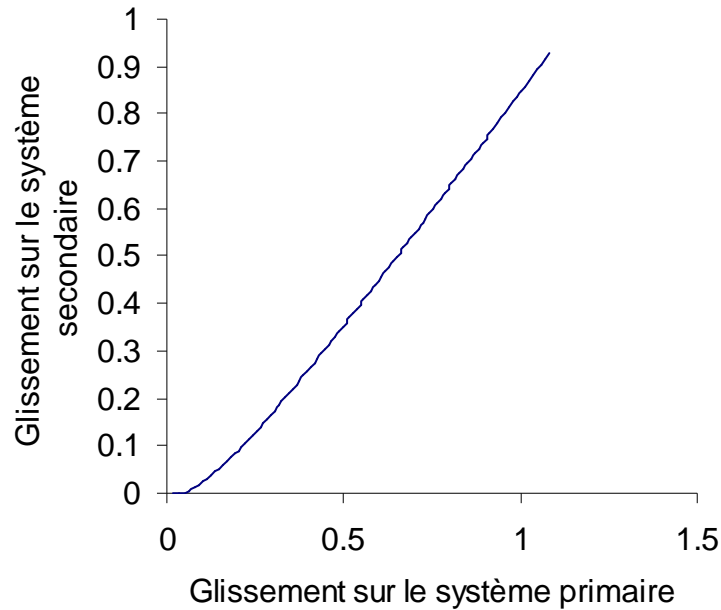


Figure 126 : Tracé du glissement sur le système secondaire  $\gamma^s$  en fonction du glissement sur le système primaire  $\gamma^p$ . Résultats obtenus par simulation numérique.

Enfin cette identification réalisée au niveau macroscopique (on identifie en considérant les résultats d'un essai mécanique sur une éprouvette) fournit des valeurs en accord avec les valeurs expérimentales obtenues à plus petite échelle. Cela prouve que le modèle est d'une part fiable et d'autre part que l'interprétation physique associée aux paramètres du modèle est complètement fondée.

Ce travail a été effectué durant la préparation de la thèse de Stéphane Dumoulin et a fait l'objet d'une publication [27].

### Conclusion

Différentes méthodes d'identification des paramètres sont proposées. Quelle que soit la méthode d'identification, les valeurs des paramètres déterminés sont physiquement acceptables. Ce qui tend à montrer que la forme proposée pour les relations est sinon correcte du moins admissible. Cependant la loi ne prend pas en compte l'écrouissage cinématique. Ceci introduit des distorsions, acceptables dans une modélisation de comportement monotone. Des tentatives de simulations de trajets alternés au moyen de cette loi, notamment dans le cas de l'aluminium, seraient peut-être impossibles sans intégrer la modélisation de l'effet cinématique.

### Positionnement de cette loi par rapport aux différents modèles existants

#### Introduction

La puissance des ordinateurs rend possible la description de l'anisotropie plastique d'agrégats polycristallins en fonction du comportement intra granulaire à petite échelle. C'est pourquoi l'étude de modèles de plasticité pour les monocristaux est depuis une dizaine d'années en plein essor : [8], [20], [62], [65], [74], [75], [80]. On dispose donc actuellement, outre le modèle proposé dans ce rapport, de plusieurs modèles qu'il s'agit de positionner entre eux. On s'intéresse ici notamment à quatre modèles de la plasticité de matériaux à structure cubique à faces centrées : celui proposé dans cette synthèse, les modèles de Pierce et al [80], Bassani et Wu [8] et Cuitiño et Ortiz [20]. La première constatation qui s'impose, au regard des différentes équations qui décrivent l'écrouissage (274), (276), (279) et (281), est que ces modèles censés décrire le même processus et rendre compte des mêmes résultats sont radicalement différents. On choisit alors de les comparer sur deux configurations classiques d'expérimentations sur monocristaux. On utilise respectivement chacun des modèles dans une simulation d'une traction avec une orientation à l'intérieur du triangle standard  $[\bar{1}35]$  et d'une traction en configuration symétrique  $[\bar{1}12]$  pour obtenir un glissement double initial. Ces deux configurations donnent des résultats radicalement différents. Dans le premier cas on s'attend à retrouver la courbe à trois stades (96). La seconde configuration conduit à une courbe sans stade I avec un écrouissage initial important.

### Formalisme des modèles étudiés

Toutes les équations des modèles étudiés sont construites sur le même formalisme. La loi d'écoulement est complétée avec une loi d'écrouissage.

La loi d'écoulement plastique détermine l'activation du système. Le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}^{(s)}$  sur le système de glissement considéré est lié à la cission résolue sur ce même système par une fonction qui fait référence à une contrainte seuil  $\tau_\mu^{(s)}$  :

$$\dot{\gamma}^{(s)} = F(\tau^{(s)}, \tau_\mu^{(s)}) . \quad (271)$$

La loi d'écrouissage décrit le durcissement obtenu sur chaque système en fonction des différents taux de glissement :

$$\dot{\tau}_\mu^{(s)} = \sum_{s=1}^n h^{(su)} \dot{\gamma}^{(u)} . \quad (272)$$

Les termes  $h^{(su)}$  forment une matrice appelée matrice d'écrouissage. Ils sont le plus souvent variables et doivent prendre en compte l'évolution de la microstructure. En fonction du modèle, ils dépendent variablement du glissement accumulé, de la densité de dislocation, ...

### Modèle de l'étude

On en profite ici pour refaire une synthèse sur les équations utilisées

#### Loi d'écoulement

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)} = \dot{\gamma}_0 \left( \frac{\tau^{(\alpha)}}{\tau_\mu^{(\alpha)}} \right)^{1/m} \text{signe}(\tau^{(\alpha)}) \quad (273)$$

#### Loi d'écrouissage

$$h^{(\alpha\beta)} = \frac{\mu d^{(\alpha\beta)}}{2 \sqrt{\sum_\omega d^{(\beta\omega)} \rho^{(\omega)}}} \left( \frac{\sum_\omega a^{(\alpha\omega)} \rho^{(\omega)}}{K} - 2 y_c \rho^{(\beta)} \right) , \text{ avec} \quad (274)$$

$$\tau_\mu^{(\alpha)} = \mu b \sqrt{\sum_\beta d^{(\alpha\beta)} \rho^{(\beta)}}$$

$$\dot{\rho}^{(\alpha)} = \frac{1}{b} \left( \frac{\sqrt{\sum_\beta a^{(\alpha\beta)} \rho^{(\beta)}}}{K} - 2 y_c \rho^{(\alpha)} \right) |\dot{\gamma}^{(\alpha)}|$$

#### Paramètres

Les paramètres du tableau 18 correspondent à un cuivre pur. Ils ont été identifiés par différentes méthodes sur les données de la littérature.

$\dot{\gamma}_0$ (/s)	m	$d_P$	$d_F$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\mu$ (MPa)	$b$ (m)	$y_c / b$	K	$\rho_0$ (m <sup>-2</sup> )
$3,7 \cdot 10^{-9}$	0,005	0,09	0,09	0,01	0,4	0,75	1	$42 \cdot 10^3$	$2,56 \cdot 10^{-10}$	3,25	36	$10^8$

Tableau 18 : Coefficients pour le modèle de l'étude.

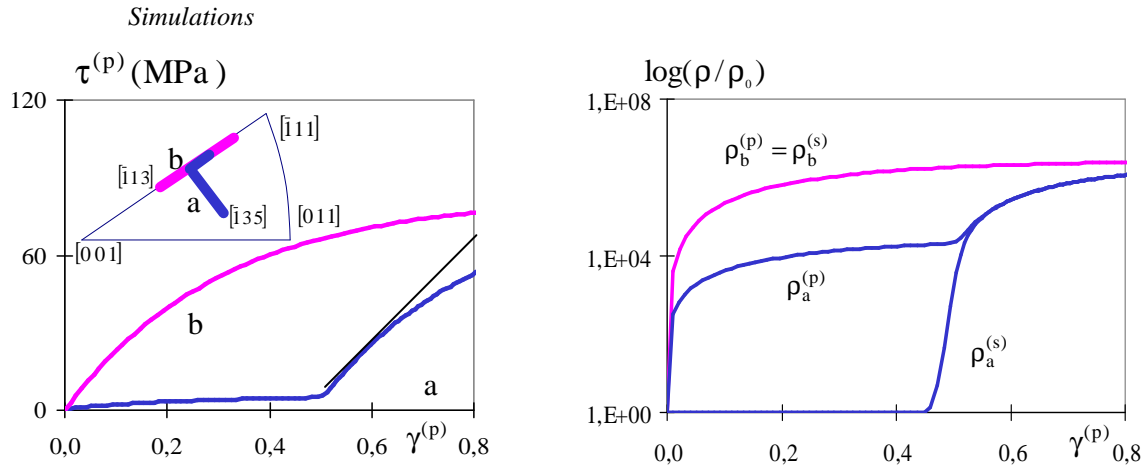


Figure 127 : Simulations de l'essai de traction sur monocristal avec le modèle de l'étude dans le cas de a) glissement simple initial et b) glissement double initial

#### a) Glissement simple initial (courbes a de la figure 127)

Lorsque la contrainte résolue sur le système B4 atteint la valeur seuil définie par la densité initiale de dislocation, le système s'active. L'écrouissage reste très modéré. La simulation restitue un stade I long. La position de l'axe de traction dans le repère cristallin évolue vers une position de symétrie. Un second système C1 s'active. L'augmentation rapide de la densité de dislocations forêts provoquées par activation simultanée de deux systèmes croisés conduit à une augmentation conséquente de la cission seuil. On observe un changement de pente (pente initiale 300 MPa) et cette seconde partie de la courbe est de type exponentiel avec saturation. Il n'est pas interdit d'y voir un stade II matérialisé par la tangente à la courbe et un stade III de saturation.

La longueur du stade se prolonge jusqu'à une déformation de 0,4 qui peut apparaître comme une valeur importante relativement aux résultats expérimentaux. L'angle entre les directions  $[\bar{1}13]$  et  $[\bar{1}12]$  est environ  $34^\circ$ . Si on se réfère au graphique présenté figure 97, on peut obtenir la longueur mini du stade I en considérant une valeur théorique moyenne minimale de rotation de  $1^\circ$  pour 0,01 de déformation. Dans ce cas la valeur minimale du stade I serait 0,35 de déformation qui rend admissible la valeur simulée. Plusieurs raisons concourent à l'explication de cette différence entre résultats expérimentaux et résultats simulés. Les conditions numériques parfaites de la traction sont difficiles à obtenir expérimentalement sur un monocristal qui possède une très faible résistance. Par exemple, Jaoul [50] rapporte qu'il préfère utiliser des éprouvettes massives en raison des problèmes sur les fils utilisés à différentes reprises pour les expériences sur les monocristaux. Les cristaux massifs, ont tendance à favoriser le glissement secondaire, donc un stade II plus précoce.

#### b) Glissement double (courbes b de la figure 127)

Avec ce type de modèle, la courbe en glissement double correspond rigoureusement à celle du stade II en glissement simple initial pour une déformation supérieure à 0,45.

### Modèle de Pierce Asaro et Needleman (1983)

Historiquement, ce modèle est l'un des premiers à décrire d'une façon générale le comportement plastique en intégrant l'influence de tous les systèmes de glissement à travers une matrice d'écrouissage.

#### Loi d'écoulement

Une loi puissance, justifiée par la théorie de l'activation thermique, décrit l'écoulement plastique sur chaque système :

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)} = \dot{\gamma}_0 \left( \frac{\tau^{(\alpha)}}{\tau_\mu^{(\alpha)}} \right)^{1/m} \text{sign}(\tau^{(\alpha)}) \quad (275)$$

$\dot{\gamma}_0$  est une vitesse de cisaillement de référence et  $m$  l'exposant de sensibilité à la vitesse.

#### Loi d'écrouissage

La matrice d'écrouissage est essentiellement déterminée par une fonction analytique  $h : \gamma \rightarrow h(\gamma)$  où  $\gamma$  est la somme des glissements accumulés sur chaque système. Trois constantes sont utilisées :  $h_0$  l'écrouissage initial,  $\tau_0$  la cission critique initiale et un exposant  $m$ . Un coefficient scalaire  $q$  définit la proportion entre les termes diagonaux et non diagonaux de la matrice. La fonction  $h$  dépend de  $l$

$$h^{(\alpha\beta)} = h(\gamma) [q + (1-q)\delta^{(\alpha\beta)}] \text{ avec :} \quad (276)$$

$$\gamma = \sum_{\beta} |\gamma^{(\beta)}|$$

$$h(\gamma) = h_0 \left( \frac{h_0 \gamma}{n \tau_0} + 1 \right)^{n-1}$$

### Paramètres

Les paramètres sont donnés dans le tableau 19 pour alliage aluminium-cuivre. Les termes de la matrice d'écroissage sont uniquement diagonaux.

$\dot{\gamma}_0$ (/s)	$m$	$h_0$ (MPa)	$\tau_0$ (MPa)	$n$	$q$
$10^{-3}$	0.005	541.476	60.84	0.1	1.

Tableau 19 : coefficient pour le modèle de Pierce Asaro et Needleman (1983)

### Simulations

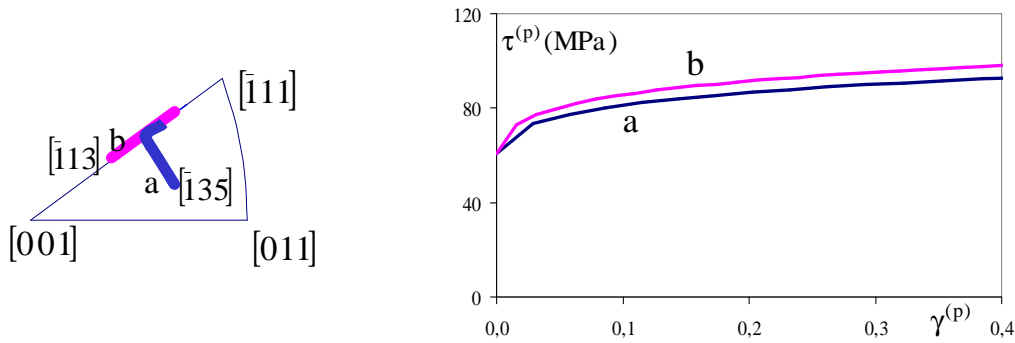


Figure 128 : Simulations de l'essai de traction sur monocristal avec le modèle de Pierce Asaro Needleman dans le cas de a) glissement simple initial, b) glissement double initial.

On constate (figure 128) qu'il n'y a pas de différence pour l'écroissage en glissement simple initial ou double. Ce qui constitue le handicap majeur de ce modèle. De surcroît, l'uniformité des termes de la matrice rend difficile l'introduction de distinction entre les systèmes de glissement. On doit rappeler que les auteurs avaient développé et utilisé ce modèle uniquement pour des simulations dans le cas d'orientations symétriques impliquant seulement deux systèmes.

### Modèle de Bassani and Wu (1992)

#### Loi d'écoulement

Dans le modèle initial, une loi parfaitement plastique est utilisée. Pour se conformer au cadre d'intégration développé pour cette étude, une loi viscoplastique classique a été employée.

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)} = \dot{\gamma}_0 \left( \frac{\tau^{(\alpha)}}{\tau_{\mu}^{(\alpha)}} \right)^{1/m} \text{ signe}(\tau^{(\alpha)}) \quad (277)$$

#### Loi d'écroissage

Bassani et Wu ont proposé ce modèle d'écroissage suite à des considérations très fines d'expériences sur des monocristaux de cuivre [8]. La forme de la matrice d'écroissage est déduite d'observations expérimentales sur la courbe de traction à trois stades. Comme conséquences de leurs différentes observations, ils imposent aux coefficients de la matrice d'écroissage de vérifier :

$$\begin{cases} h^{(sp)}(\gamma^{(p)}, \gamma^{(s)} = 0) < h^{(pp)}(\gamma^{(p)}, \gamma^{(s)} = 0) \\ h^{(pp)}(\gamma^{(p)}, \gamma^{(s)} = 0) < h^{(pp)}(\gamma^{(p)}, \gamma^{(s)}) \\ h^{(pp)}(\gamma^{(p)}, \gamma^{(s)}) < h^{(ss)}(\gamma^{(p)}, \gamma^{(s)}) < \gamma^{(p)} \end{cases}, \quad (278)$$

Ces relations sont traduites au moyen d'une expression purement phénoménologique pour chaque coefficient de la matrice d'écrouissage. Tous les modules diagonaux sont le produit d'un terme  $F$  relatif à l'auto-écrouissage et  $G$  qui introduit l'effet de durcissement latent. Les paramètres utilisés sont :  $\tau_0$  la cission critique initiale,  $\tau_I$  la cission de stade I,  $h_0$  la valeur du taux d'écrouissage initial et  $h_{sat}$  la valeur de saturation obtenue en glissement simple pour les grands taux de déformation.  $\gamma_0$  est la quantité de glissement sur le système secondaire à partir de laquelle l'effet du durcissement latent tend rapidement vers un maximum. L'effet de la nature de l'interaction est introduit par le coefficient  $a^{(\alpha\beta)}$ . Un coefficient  $q$  optionnel autorise l'activation de termes hors diagonale mais ces termes sont maintenus similaires aux termes diagonaux par les auteurs.

$$h^{(\alpha\alpha)} = F(\gamma^{(\alpha)})G(\gamma^{(\alpha)}) \text{ et } h^{(\alpha\beta)} = q h^{(\alpha\alpha)}, \quad \text{avec :} \quad (279)$$

$$F(\gamma^{(\alpha)}) = (h_0 - h_{sat}) \sec h^2 \left( \frac{(h_0 - h_{sat}) \gamma^{(\alpha)}}{\tau_I - \tau_0} \right) + h_{sat}$$

$$G(\gamma^{(\alpha)}) = 1 + \sum_{\beta \neq \alpha} a^{(\alpha\beta)} \tanh \left( \frac{\gamma^{(\beta)}}{\gamma_0} \right)$$

#### Paramètres

Les paramètres sont présentés dans le tableau 20. Les termes d'interaction  $a^{(\alpha\beta)}$  sont ramenés à quatre en fonction de la nature de l'interaction selon les distinctions proposées par Franciosi [34]. Les termes non-diagonaux sont maintenus à une valeur nulle.

$\dot{\gamma}_0$ (/s)	$m$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$q$	$\tau_0$ (MPa)	$\tau_I$ (MPa)	$h_0$	$h_{sat}$	$\gamma_0$
$10^{-6}$	0.005	7.5	8	15	20	0	1	117	90	135	$10^{-3}$

Tableau 20 : Coefficients pour le modèle de Bassani and Wu (1992).

#### Simulations

a) glissement simple initial (courbes a de la figure 129)

Avec les données des auteurs, on obtient correctement le stade I et II. Le stade III n'est pas atteint.

b) glissement double initial (courbes b la figure 129)

Le durcissement en glissement double respecte au moins qualitativement les caractéristiques expérimentales généralement observées.

Dans le cadre de l'étude de ce modèle une constatation remarquable s'impose. Les auteurs ont utilisé une matrice d'écrouissage diagonale qui supporte à la fois l'auto-écrouissage et l'écrouissage latent. Ce procédé a deux inconvénients. Premièrement, dans le cas du glissement simple, on assiste effectivement à une augmentation du terme diagonal correspondant au système secondaire. Cette augmentation n'est pas reportée sur la cission tant que le glissement du système secondaire est nul. Deuxièmement, une confusion est créée en incorporant le durcissement latent dans un terme dont l'usage veut qu'il soit réservé à l'auto-écrouissage. En fait cette dernière remarque s'applique pratiquement à tous les modèles, que la matrice soit diagonale ou pas. Le terme diagonal (habituellement considéré comme le terme de l'auto-écrouissage) comporte toujours une influence liée au glissement sur le système secondaire.

Une version plus récente de ce modèle [9], non-testée, reproduit la diminution d'écrouissage observée en stade III en introduisant une dépendance supplémentaire du paramètre  $h_{sat}$  en fonction du glissement accumulé sur tous les systèmes.

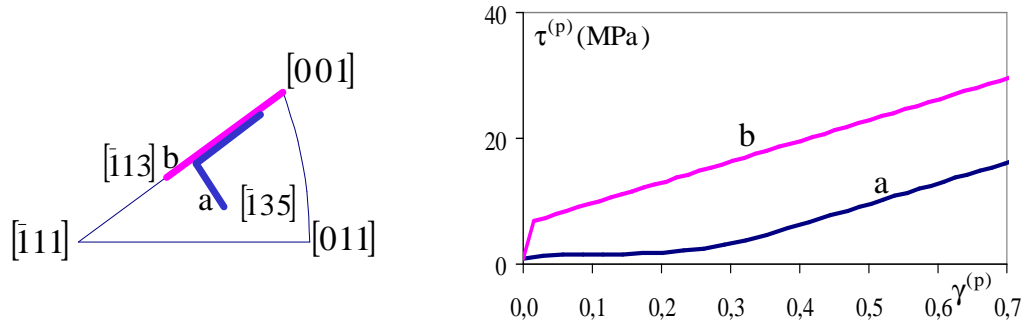


Figure 129 : Simulation de l'essai de traction sur monocristal avec le modèle de Bassani et Wu dans le cas de a) glissement simple initial, b) glissement double initial.

### Modèle de Cuitiño et Ortiz (1992)

#### Loi d'écoulement

Ce modèle explique le durcissement à partir de considérations statistiques sur un ensemble de dislocations mobiles à travers une population de dislocations forêts. La limite d'écoulement est déduite du calcul du champ de contrainte à courte distance des dislocations forêts. La procédure fournit la forme de la loi d'écoulement :

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)} = \dot{\gamma}_0 \left[ \left( \frac{\tau^{(\alpha)}}{\tau_\mu^{(\alpha)}} \right)^{1/m} - 1 \right]. \quad (280)$$

$m$  et  $\dot{\gamma}_0$  sont les paramètres associés à cette description.

#### Loi d'écrouissage

Selon le même schéma, on obtient la matrice d'écrouissage en fonction de la densité de dislocations. Cette matrice est diagonale. Les composantes sont données par une expression plutôt complexe qui introduit  $\tau_\mu^{(\alpha)}$  la contrainte seuil,  $g^{(\alpha)}$  la contrainte de référence du système de glissement (comme proposé par Kocks) et  $\gamma_\mu^{(\alpha)}$  la déformation plastique caractéristique (différente du glissement sur le système  $\gamma^{(\alpha)}$ ). Les évolutions de  $g^{(\alpha)}$  et  $\gamma_\mu^{(\alpha)}$  sont fonction de la densité de dislocations. Cette densité est exprimée en fonction du glissement  $\gamma^{(\alpha)}$  déjà obtenu sur le système. Il n'y a pas de couplage avec les autres systèmes. A partir de la densité initiale,  $\rho_0$ , la densité courante  $\rho^{(s)}$  tend (rapidement) vers sa valeur de saturation  $\rho_{sat}$  quand la valeur du glissement accumulé sur le système est plus grande que la valeur caractéristique  $\gamma_{sat}$ . Les paramètres utilisés dans ces équations sont :  $\alpha$  un paramètre sans dimension, les composantes de la matrice d'interaction  $[a^{(sp)}]$  et l'amplitude du vecteur de Burgers  $b$ .

$$h^{(\alpha\alpha)} = \frac{g^{(\alpha)}}{\gamma_\mu^{(\alpha)}} \left( \frac{\tau_\mu^{(\alpha)}}{g^{(\alpha)}} \right)^3 \left[ \cosh \left( \left( \frac{g^{(\alpha)}}{\tau_\mu^{(\alpha)}} \right)^2 \right) - 1 \right], \text{ avec :} \quad (281)$$

$$\gamma_\mu^{(\alpha)} = \frac{b\rho^{(\alpha)}}{2 \sqrt{\sum_\beta a^{(\alpha\beta)} \rho^{(\beta)}}}$$

$$g^{(\alpha)} = \alpha \mu b \sqrt{\pi \sum_\beta a^{(\alpha\beta)} \rho^{(\beta)}}$$



$$\rho^{(\alpha)} = \rho_{sat} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho_{sat}} \right) \exp \left( - \frac{\gamma^{(\alpha)}}{\gamma_{sat}} \right) \right]$$

### Paramètres

Les paramètres sont donnés dans le tableau 21. Comme pour le modèle de Bassani et al, on retrouve 4 coefficients d'interaction  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  pour obtenir la matrice  $[a^{(sp)}]$ . Les valeurs initiales de la contrainte critique et de la densité sur chaque système sont données par  $\tau_0$  et  $\rho_0$ .

$\dot{\gamma}_0$ (/s)	$m$	$\tau_0$ (MPa)	$\alpha$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\gamma_{sat}$	$\rho_0$ $m^{-2}$	$\rho_{sat}$ $m^{-2}$	$b$ m
1	0,01	2	0,3	$7,5 \cdot 10^{-4}$	$5,7a_0$	$10,2a_0$	$16,6a_0$	0,005	$10^{12}$	$10^{15}$	$2,56 \cdot 10^{-6}$

Tableau 21 : Coefficients pour le modèle de Cuitiño et Ortiz (1992).

### Simulations

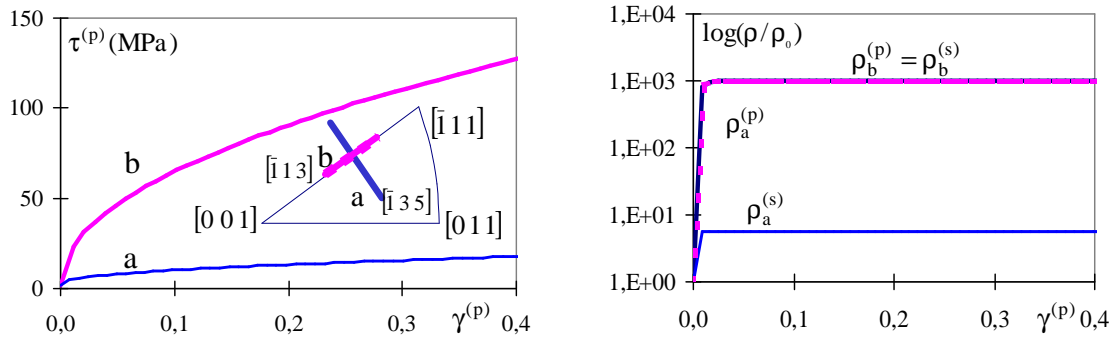


Figure 130 : Simulations de l'essai de traction sur monocristal dans le cas de a) glissement simple initial et b) glissement double initial

a) glissement simple initial (courbes a de la figure 130)

La simulation ne rend pas compte d'un glissement double et par conséquent, le stade II n'est pas obtenu. Cette situation conduit inévitablement l'axe de traction à traverser l'axe de symétrie et passer dans le triangle voisin (over-shoot). Ce résultat est en fait obtenu quelle que soit la position de l'axe de traction à l'intérieur du triangle, exception faite de positions très voisines de la zone de symétrie. C'est cette dernière configuration qui est d'ailleurs adoptée par les auteurs pour obtenir un glissement simple puis un glissement double.

La matrice d'écroutissage est diagonale, comme pour Bassani et Wu. De façon similaire un durcissement important est généré sur la composante du système secondaire sans qu'aucun accroissement de la valeur de la contrainte seuil correspondante ne soit enregistré tant que le glissement secondaire reste nul. Lorsque le système secondaire est momentanément actif par suite de la rotation cristalline, la valeur d'écroutissage est trop importante. L'augmentation de la contrainte seuil qui en découle conduit au blocage définitif du système secondaire.

b) glissement double initial (courbes b de la figure 130)

Le glissement double semble qualitativement bien rendu même si on ne constate pas une diminution très notable du taux d'écroutissage pour les grandes déformations.

Dans les deux cas de simulation, les densités de dislocations saturent très (trop ?) rapidement si on se réfère aux évolutions enregistrées expérimentalement. Cet ensemble de constatations amène la conclusion suivante. Ce modèle, initialement conçu pour les simulations d'écroutissage latent, semble néanmoins avoir des difficultés notables pour simuler un essai de traction monotone avec ses trois stades alors que les résultats sont meilleurs en glissement double initial. Par ailleurs, les relations semblent finalement plutôt phénoménologiques en dépit du cadre plutôt physique initialement choisi par les auteurs.

### Remarques générales sur cette comparaison

Une analyse complémentaire est pratiquée pour vérifier si les modèles suivent les prescriptions suggérées par Bassani et Wu, équation (278). Les évolutions des quatre composantes de la matrice d'écroutissage concernant le système primaire et le système secondaire sont comparées et reportées sur la figure 131.

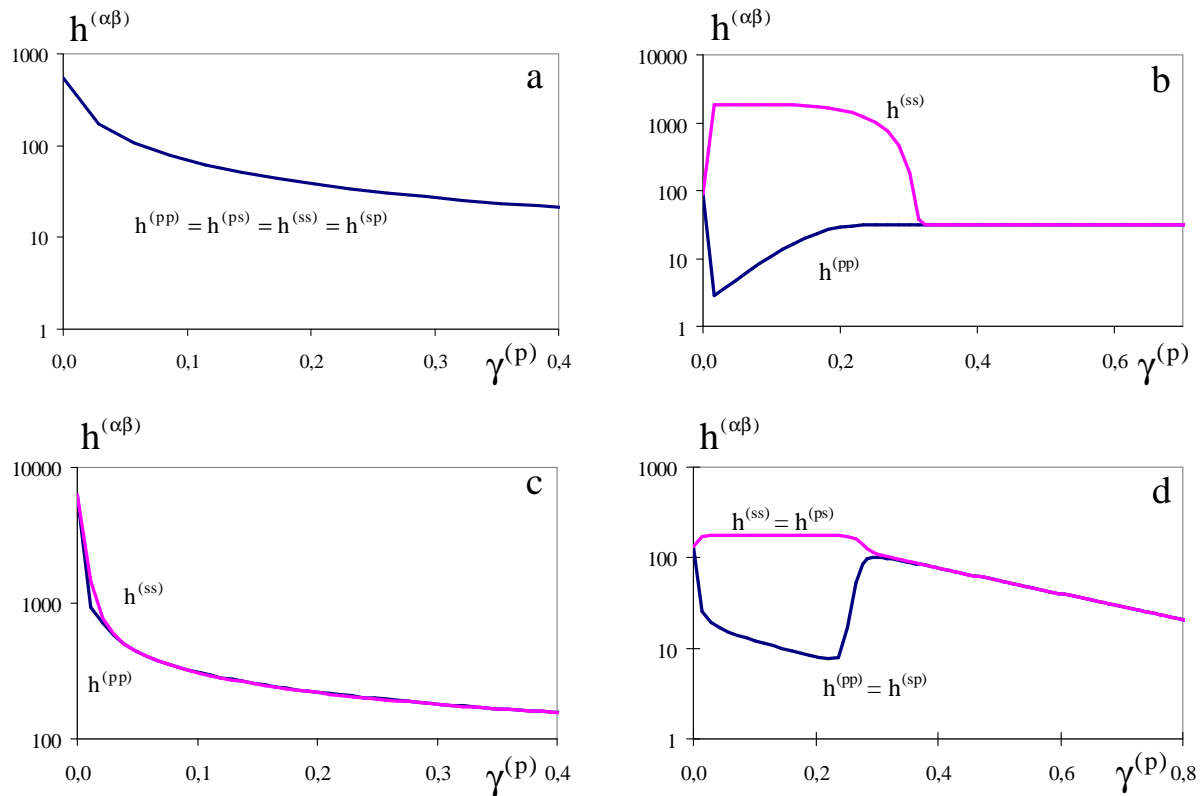


Figure 131 : Evolution des composantes  $h^{(pp)}$ ,  $h^{(pp)}$ ,  $h^{(ps)}$  et  $h^{(sp)}$  pour les différents modèles en glissement simple dans le cas a) Pierce Asaro Needleman b) Bassani et Wu c) Cuitiño et Ortiz d) Modèle de l'étude.

Le modèle de Pan Asaro et Needleman ainsi que celui de Cuitiño et Ortiz ne respectent pas les indications de l'équation (278). Les évolutions des coefficients dans le cas du modèle de l'étude et naturellement de celui de Bassani et Wu sont quant à elles conformes. Des petites différences sont visibles, notamment pour le stade I.

Tous ces modèles souffrent cependant de quelques défauts :

- Aucun des modèles présentés ne tient compte de l'effet des contraintes cinématiques.
- Ces équations sont développées pour des monocristaux généralement supposés purs alors que comme le montrent Pierce Asaro et Needleman [80], les lois sont radicalement différentes pour des matériaux alliés.
- Quel que soit le modèle, tous les termes diagonaux de la matrice d'écrouissage impliquent du durcissement latent, ce qui implique que ces termes ne doivent pas être vus comme des "coefficients d'auto-durcissement". Cette distinction est par contre applicable sur les coefficients de la relation qui lie les contraintes seuil aux densités de dislocations comme le propose l'équation (210) du modèle de l'étude.

## Conclusion

Quatre modèles typiques de la plasticité du monocristal de structure cfc, développés pour effectuer la simulation du comportement anisotrope d'agrégats polycristallins sont comparés sur leur aptitude à décrire un essai en traction simple. Pour cet objectif, tous les modèles ont été intégrés en utilisant la même procédure numérique. Les résultats de chaque modèle ne sont pas toujours en accord avec ceux prévisibles d'un essai de traction (notamment en glissement simple initial). Les simulations font apparaître de grandes différences de résultats entre les modèles. Dans ce comparatif, même si comme les autres, il ne peut pas simuler l'effet Bauschinger<sup>14</sup>, le modèle de l'étude semble tirer honorablement son épingle du jeu. Les simulations sont au moins en accord qualitatif<sup>15</sup> avec les résultats expérimentaux et il vérifie valablement les prescriptions expérimentales liées à l'écrouissage latent.

<sup>14</sup> Ce modèle a servi de point de départ à Harder [45] pour proposer une description plus générale qui intègre l'écrouissage cinématique. D'autres modèles [74] proposent également une description de l'écrouissage cinématique. Dans les deux cas cette description est phénoménologique

<sup>15</sup> Les résultats d'une simulation d'un essai de traction sont complètement détaillés dans [85]

Ce travail a été réalisé au cours du travail post-doctoral de Pascal Balland, attachée temporaire d'enseignement et de recherche au laboratoire [6].

## **5 Conclusion de la deuxième partie**

Dans cette partie, nous avons proposé une modélisation du comportement élastoviscoplastique du monocristal en grandes transformations. Un soin tout particulier a été apporté à la justification des relations en partant du choix des mécanismes physiques élémentaires jusqu'à la relation finale. Ceci définit alors complètement les limites d'utilisation de ce modèle. Tout matériau qui utilise un mécanisme non inclu initialement n'est pas modélisable avec les équations proposées. Il faut reformuler le problème pour trouver les bonnes relations (cf. matériaux cubiques centrés par exemple). Les différentes tentatives de validation aussi bien en utilisant des simulations 3d de l'évolution des dislocations que la simulation du comportement de monocristaux sous chargement complexe montrent que ce type de modèle est apte à décrire si ce n'est quantitativement, au moins qualitativement la plasticité du monocristal. On a décelé qu'une des faiblesses de cette modélisation est de ne pas restituer l'écrouissage cinématique qui à terme devra être intégré.

Nous estimons cependant la performance globale du modèle suffisante pour passer à une étape supplémentaire, c'est-à-dire, la description du comportement plastique des agrégats cristallins en trajet monotone.

## PARTIE 4 Vers la description unifiée de la plasticité des agrégats cristallins

L'objectif est de tenter progressivement d'utiliser la modélisation proposée pour décrire le comportement général d'un polycristal. La généralisation pourrait "simplement" être obtenue en utilisant les relations proposées comme descriptive du comportement du matériau. Différents chercheurs ont déjà réalisé ce genre de travail à partir d'autres lois [68, 72]. Parmi ces travaux beaucoup font appel au modèle pseudo phénoménologique de Bassani [8]. Les simulations du polycristal reposent souvent sur une identification de la loi dans un contexte également polycristallin sans qu'on ait la garantie que le modèle proposé décrive correctement le comportement intra-granulaire. En fait la question posée est de savoir si un modèle monocristallin peut, sans modification d'aucune sorte décrire le comportement d'un grain noyé dans d'autres grains. C'est notamment ce qu'on propose de vérifier sur le modèle objet de la présente étude : on utilise le modèle et les valeurs des paramètres obtenus pour des monocristaux comme modèle d'un multicristal. On restreint l'étude au cas du multicristal en raison de la grande quantité de données expérimentales à vérifier. La plus grande difficulté à ce niveau est, de notre point de vue, de rendre compte correctement de l'écrouissage. La répartition des déformations est beaucoup plus facile à obtenir car les expériences modélisées (en traction) se font à déplacement imposé aux extrémités. Ce chapitre est organisé de la façon suivante. On s'intéresse tout d'abord à la loi de Hall-Petch qui est l'un des principaux modèles relatifs aux polycristaux. Il faut déterminer si l'application du modèle de l'étude comme modèle pour la plasticité multicristalline est compatible avec cette loi. Ensuite, on montre un résultat typique de simulation sur un agrégats de quelques grains. Enfin, on aborde le problème de transposition ou d'utilisation de cette loi pour la description du polycristal.

### Effet Hall-Petch

La déformation des polycristaux met en jeu fondamentalement les mêmes mécanismes que ceux présents dans les monocristaux. Des effets complémentaires sont ajoutés par la présence de limites physiques apportées par les joints de grains.

Dans un premier temps, le grain tend à se déformer comme un monocristal.

Le premier effet de ces joints de grains est de limiter le glissement des dislocations primaires de part et d'autre du joint. D'importantes contraintes élastiques apparaissent alors et provoquent l'activation de systèmes complémentaires compatibles avec la déformation simultanée des deux grains au voisinage du joint. Le nombre de systèmes actifs est alors beaucoup plus élevé dans les polycristaux que dans les monocristaux. L'écrouissage d'un polycristal est donc beaucoup plus important. On constate dès lors, la disparition du stade I. Le durcissement est d'autant plus important que la taille des grains est petite.

La relation de Hall-Petch [43,78], toujours très référencée actuellement, relie la limite élastique d'un matériau en traction à la taille du grain au moyen de la relation :

$$\sigma_{el} = \sigma_0 + kd^{-1/2}, \quad (282)$$

où  $\sigma_0$  et  $k$  sont des constantes relatives au matériau et  $d$  la taille de grain moyenne de l'échantillon. Dans la modélisation du comportement du monocristal, la limite élastique est définie par une dépendance avec la densité initiale  $\rho_0^{(s)}$  des dislocations par une relation du type :

$$\tau_\mu = \alpha \mu b \sqrt{\sum_s \rho_0^{(s)}}. \quad (283)$$

Pour rendre directement notre modélisation compatible avec relation (282), il faudrait établir une dépendance des densités initiales de dislocations avec la taille de grain. Cette direction constitue une piste pour mettre en concordance les deux relations. Avant de valider cette option, il convient d'examiner plus attentivement les conditions d'obtention de la loi de Hall-Petch. Tout d'abord, il faut préciser que la loi de Hall-Petch est obtenue à partir d'une limite élastique souvent déterminée pour 5% de déformation plastique. A une telle déformation, le matériau s'est déjà considérablement écroui et donc on compare en fait des niveaux d'écrouissage et non pas des limites élastiques. C'est ce qui a conduit différents auteurs à opter pour une forme modifiée où les constantes  $\sigma_0$  et  $k$  dépendent de la déformation  $\varepsilon$  à laquelle on relève la limite élastique :

$$\sigma_{el} = \sigma_0(\varepsilon) + k(\varepsilon)d^{-1/2}. \quad (284)$$

Malgré cette modification, il semble qu'il soit difficile d'appliquer cette relation générale sur une large gamme de tailles de grains avec une bonne reproductibilité des coefficients (voir par exemple la revue exhaustive sur

l'aluminium proposée par [96]). Même s'il existe une dépendance certaine entre la taille de grain et la limite élastique ou de façon plus générale, le comportement plastique, il semble difficile de traduire ce comportement au moyen d'une seule équation à caractère trop phénoménologique.

L'évolution proposée par différents auteurs [51,44,82,91] est alors d'intégrer l'effet des structures de dislocations qui se créent au cours de la déformation sur la contrainte à appliquer au matériau. Le grain constitue un milieu borné duquel les dislocations mobiles ne peuvent s'extraire. Elles s'agrègent et provoquent alors de fortes contraintes retour sur les sources. Ce phénomène nécessite alors l'augmentation de la contrainte appliquée. Une relation pour traduire cet effet fait intervenir des paramètres internes du matériau en relation avec la microstructure qui se développe :

$$\sigma_{el} = \sigma_0 + \alpha \mu b \left( \frac{\varepsilon}{4bd} + \frac{\varepsilon}{d\lambda^s} \right)^{-1/2} \quad (285)$$

Le paramètre  $\lambda^s$  représente la distance de glissement

Cette vision du phénomène traduit une toute autre philosophie attachée à l'effet Hall-Petch. Il ne s'agit plus de distinguer des valeurs de limites élastiques initiales mais bien un effet associé à une histoire de déformation. Il faut en effet qu'il y ait eu glissement pour que l'effet de taille de grain se manifeste.

De notre point de vue, le principe à retenir comme à l'origine de l'effet Hall-Petch n'est pas évident. La phénoménologie reste prépondérante au détriment d'une identification très claire des mécanismes à l'origine de cet effet. Quelle que soit l'option retenue, le modèle est suffisamment adaptable pour être compatible avec la vision du phénomène.

Si on choisit de modifier la densité initiale pour faire varier la limite élastique, on obtient une vraie dépendance de la contrainte seuil à travers la relation (283). Il est à souligner que le lien entre la densité initiale et la taille de grain n'a pas, à notre connaissance, été étudié.

Si on choisit d'attribuer l'effet Hall-Petch aux conséquences d'une déformation plastique, l'évolution du durcissement est imposée par deux facteurs additifs. Les incompatibilités de déformation aux joints de grains ont pour suite une augmentation de la contrainte appliquée localement sur les systèmes de leur voisinage. Un nombre important de systèmes s'activent et l'écrouissage est d'autant plus important. Cet effet est déjà naturellement décrit par la modélisation proposée. Lorsque la taille de grain diminue, on doit considérer l'importance des contraintes produites par les structures de dislocations qui se produisent dès l'instant où le matériau se déforme. Comme mentionné à plusieurs reprises, le modèle sous sa forme actuelle, ne prend pas en compte l'effet de telles contraintes. Il conviendra de les intégrer dès l'instant où les simulations mettront en jeu des éprouvettes avec des tailles de grains très petites.

En l'occurrence, les lois sont appliquées pour la simulations d'agrégats de grains de taille centimétrique, ce qui ne rend pas encore trop critique l'utilisation des lois proposées qui n'intègrent pas l'effet cinématique.

### Simulation des multicristaux

Des multicristaux purs et impurs d'aluminium ont été simulés en utilisant le code de simulation et la loi de comportement proposée. L'objectif est de montrer que les lois qu'on a identifiées et qui fonctionnent au niveau du monocristal sont aptes à rendre compte du comportement d'agrégat polycristallins [41]. D'autres travaux assez similaires sur le fond ont été réalisés sur le cuivre et sur l'acier. Le modèle de départ de ces références est relativement semblable à celui de l'étude. Cependant comme l'identification est qualitative [22,23] ou les agrégats sont virtuels [1], on n'a pas l'assurance que le modèle monocristallin soit directement applicable à la simulation d'agrégats cristallins. On présente ici quelques résultats de simulations qui reproduisent correctement les résultats expérimentaux relatifs, illustrant la potentialité du modèle monocristallin à restituer le comportement d'agrégats à gros grains.

#### Modélisation de l'agrégat cristallin pur

##### *Données expérimentales*

Des multicristaux purs d'aluminium (99,99%) ont été générés à partir de la même tôle que celle qui a servi pour l'identification des monocristaux purs. La figure 132 donne un exemple de configuration multicristalline. Cette configuration sert de support pour les comparaisons expérimentales et simulations proposées dans la suite. Il faut d'ors et déjà noter que la pureté du matériau choisi rend ce matériau très mou et très difficile à manipuler.

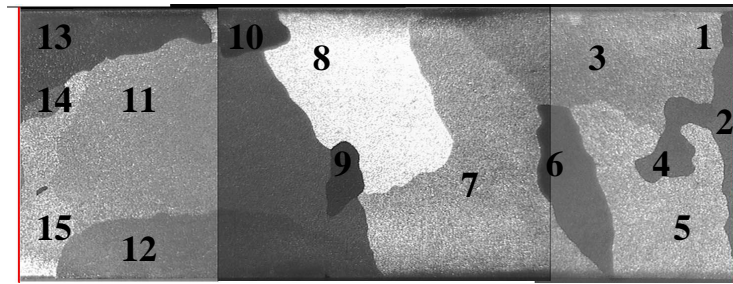


Figure 132 : Exemple de configuration multicristalline.

Les grains de chaque multicristal sont orientés par mesure d'électrons rétro-diffusés sous microscopie électronique à balayage (figure 133). On constate qu'une bonne dispersion des orientations est obtenue par le procédé de recristallisation.

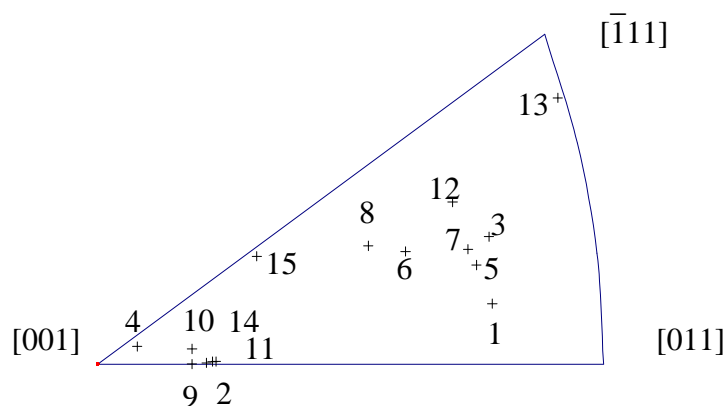


Figure 133 : Position cristallographique initiale de l'axe de traction pour chacun des grains du multicristal pur.

Les multicristaux sont ensuite tirés sur machine de traction. Les courbes force-déplacement, les déformations intra-granulaires sont enregistrées. Après déformation, les orientations finales sont également mesurées.

#### Modélisation éléments finis

L'éprouvette est maillée figure 135. En raison de la puissance limitée de notre système informatique, nous n'utilisons qu'un nombre assez limité d'éléments pour décrire le multicristal. Dans la mesure du possible, une couche d'éléments interfaces est créée au voisinage de chaque grain. Il est également souhaitable qu'un joint triple soit discrétisé suivant le schéma de la figure 134. Le joint de grain entre 2 et 3 est prolongé dans le grain 1. Cette organisation est répétée pour les deux autres joints de grain. Cette disposition permet d'observer la partition en glissement dans le grain qui est parfois observée expérimentalement. Comme cette disposition entraîne l'utilisation d'éléments parfois très distordus et qu'elle conduit à un travail de remaillage manuel très important, elle n'a pas toujours été utilisée.

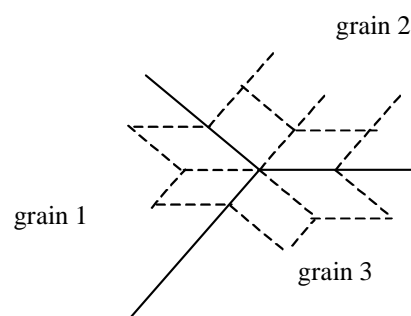


Figure 134 : Maillage d'un joint triple.

La continuité des déplacements aux joints de grain est assurée. Cette dernière disposition rend possible l'utilisation du code de simulation déjà utilisé pour la simulation du comportement hétérogène des monocristaux.

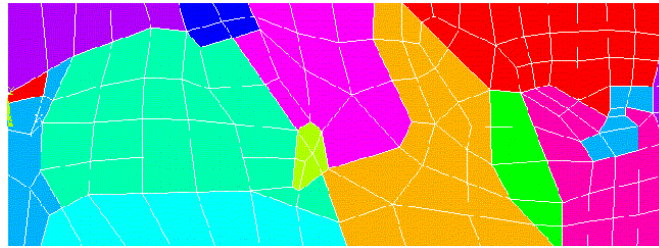


Figure 135 : Maillage de l'éprouvette multicristalline.

#### *Comparaison des résultats expérimentaux et simulations*

On montre ici quelques exemples de résultats qui ont été obtenus. Le premier résultat (figure 136) est la comparaison entre les courbes force-déplacement expérimentale et simulée.

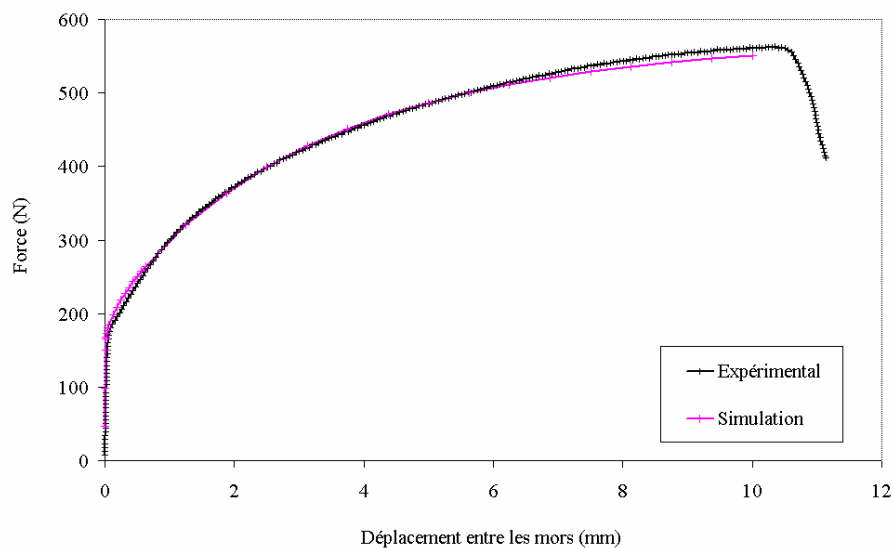


Figure 136 : Comparaison courbe force déplacement de l'éprouvette multicristalline expérimentale et simulée.

A partir de ces données on déduit les courbes contrainte-déformation expérimentale et simulée (figure 137). Il s'agit de courbes moyennes calculées à partir du suivi de quatre points de l'éprouvette. Cette courbe ne rend pas compte des hétérogénéités de contrainte et de déformation mais elle permet de valider la modélisation de l'écrouissage qui apparaît ici excellente. La distribution des déformations est obtenue avec le logiciel d'analyse des déformations en post traitant les images de l'éprouvette enregistrées au cours de l'essai. On donne deux comparaisons à deux taux de déformation.

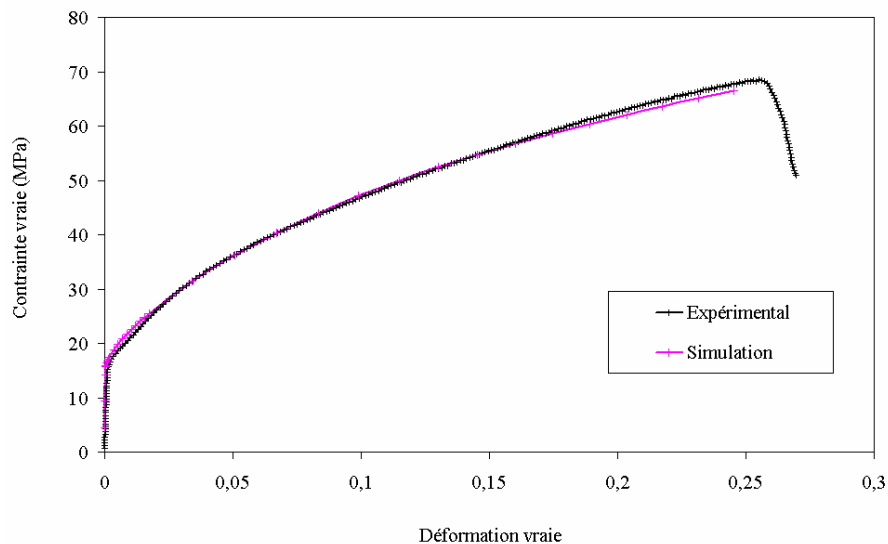


Figure 137 : Comparaison courbe contrainte vraie- déformation vraie (moyennes) expérimentales et simulées.

La distribution des déformations est correctement rendue à au cours de l'essai (figure 138). Il est plus difficile cependant de prédire ce qui se passe en fin de déformation (figure 139). Cette difficulté a été rencontrée sur les différents essais simulés. Deux raisons sont invoquées. Le matériau est très mou et les conditions expérimentales sont très difficiles. Il n'est pas impossible que la manipulation de l'échantillon ait une incidence sur l'endroit où se produit la localisation. Le maillage n'est pas très fin, et a certainement une incidence à ce niveau sur le résultat calculé.

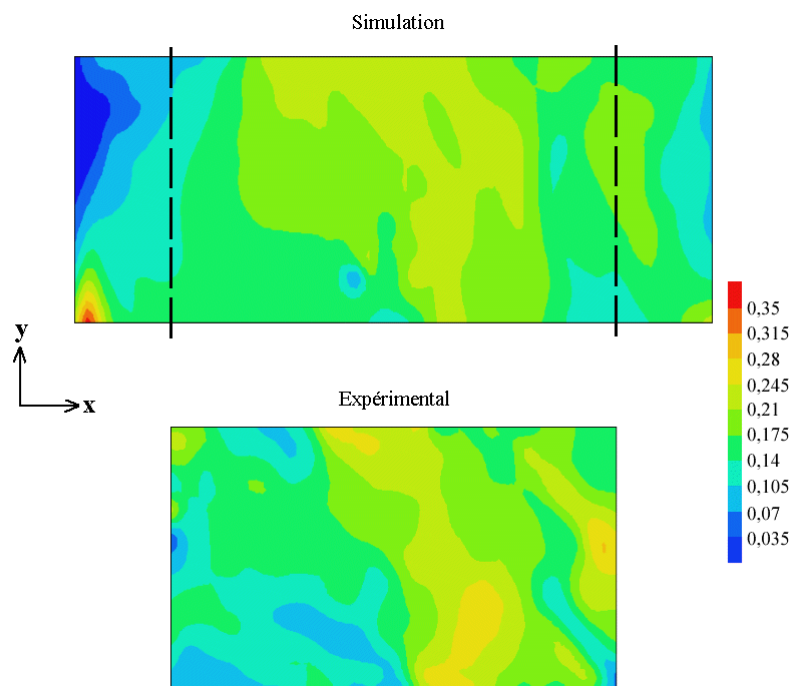


Figure 138 : Comparaison entre mesure expérimentale et simulation des déformations.

On compare également l'évolution des orientations réelles et simulées. A titre d'exemple on a donné l'évolution des orientations dans le grain 7 (figure 140).



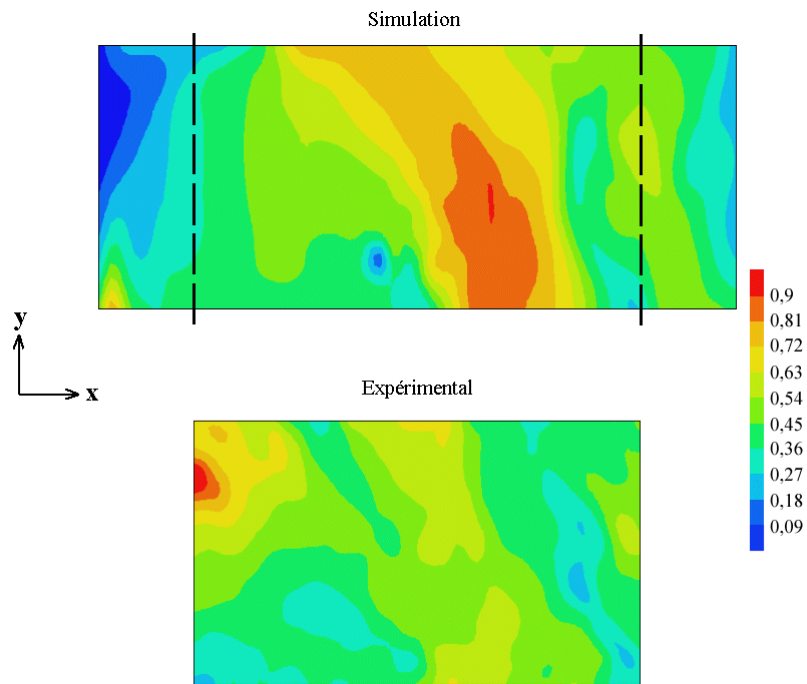


Figure 139 : Comparaison entre mesure expérimentale et simulation des déformations (fin d'essai).

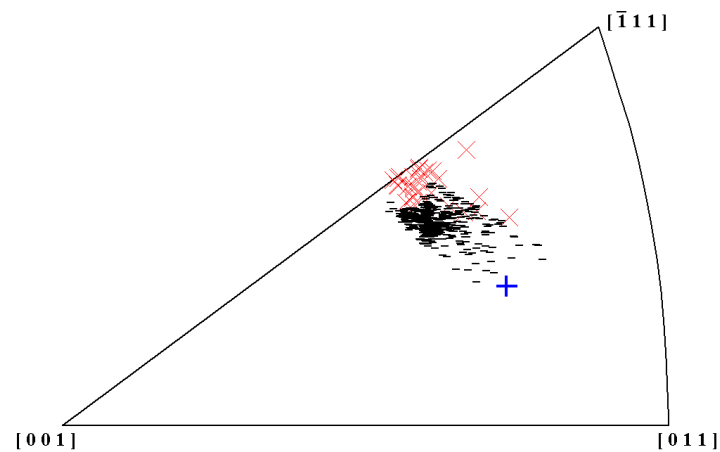


Figure 140 : Suivi des orientation dans le grain 7 ( $\times$  simulé – mesuré).

Les traces de glissement sont également comparées aux traces de glissement simulées (figure 141). Ces comparaisons simplistes devront cependant être corroborées par des mesures plus fines des densités de dislocations.

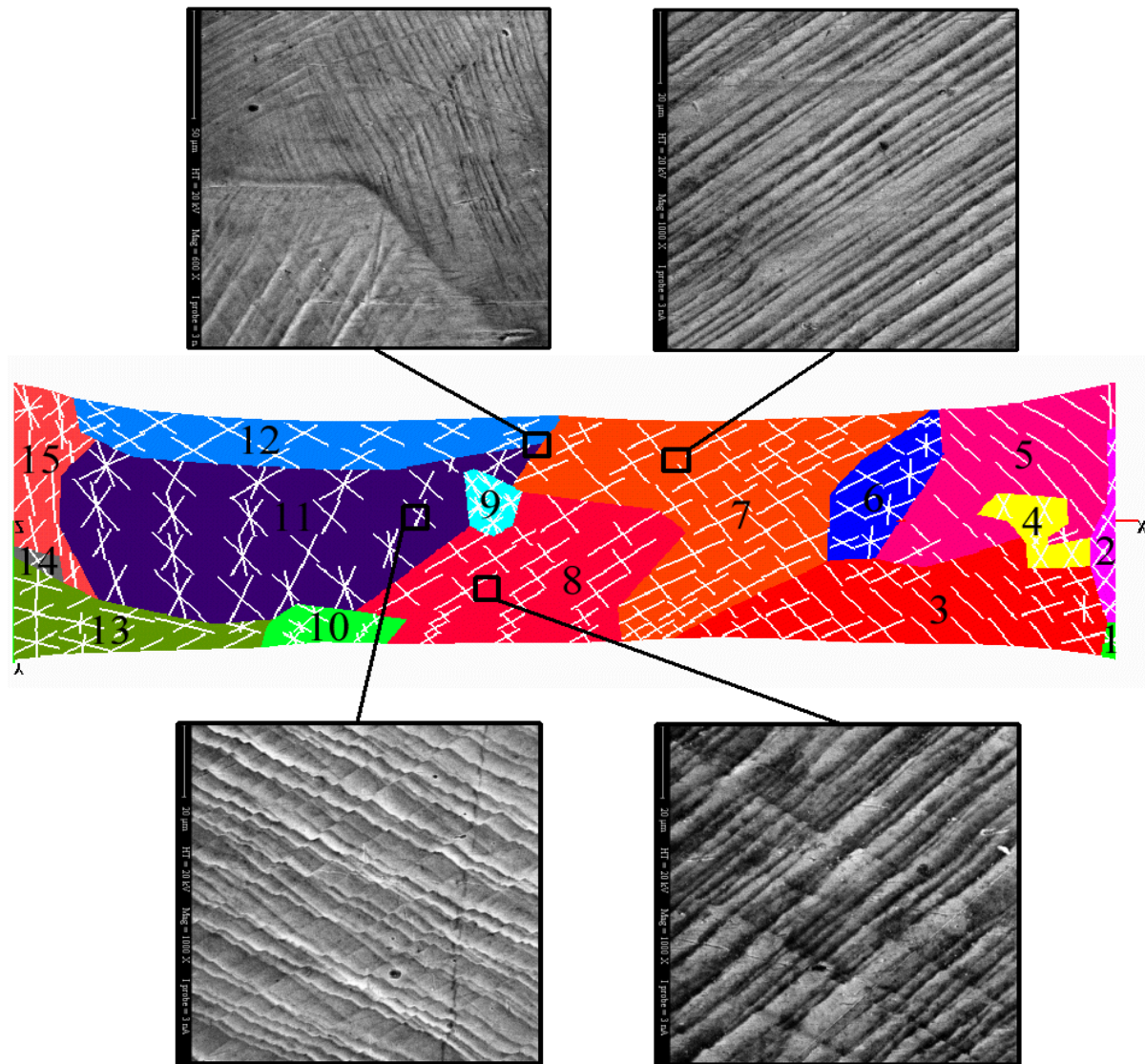


Figure 141 : Analyse des traces de glissement au cours de la traction sur monocristal d'aluminium pur.

Ces résultats montrent que le modèle tel qu'il est défini et identifié pour des monocristaux reproduit le comportement d'agrégats cristallins à gros grains. Ceci est confirmé par différentes études similaires qui portent également sur l'aluminium légèrement impur [26], [41]. Il y a bien sûr un fossé pour appliquer maintenant ce modèle à la simulation d'opérations d'emboutissage. Différentes voies de recherches actuelles sont indicatives des actions possibles pour la concrétisation d'un tel objectif : l'application ou l'exploitation des modélisations multi échelles pour traiter un cas complexe.

### Vers une exploitation au niveau macroscopique

Deux pistes sont explorées. La transposition ou l'adaptation des lois sous forme de relations plus macroscopiques qui intégreraient les effets granulaires, tout en conservant un maximum de sens physique aux équations, est la première voie. La seconde consiste à utiliser les lois telles quelles pour simuler des opérations d'emboutissage. A titre de conclusion et sous forme prospective on rapporte quelques travaux significatifs déjà réalisés dans d'autres équipes.

#### Intégration des lois

A l'IRSID [15], pour décrire le comportement des aciers lors d'un essai de traction, on utilise une version simplifiée de la loi d'évolution de la densité de dislocations pour décrire le comportement du monocristal :

$$\frac{d\rho}{d\gamma} = \frac{1}{b\Lambda} - y_c \rho \quad (286)$$

avec :

$$\frac{1}{\Lambda} = \sum_{i=1, obstacles} \frac{1}{\Lambda_i}, \quad (287)$$

et de la relation d'écrouissage :

$$\tau = \tau_0 + \alpha \mu b \sqrt{\rho}. \quad (288)$$

L'utilisation de ces lois suppose une situation de glissement multiple identique sur plusieurs systèmes. Pour passer au polycristal, les relations sont intégrées et on utilise le facteur de Taylor pour obtenir le lien entre la contrainte longitudinale  $\sigma$  et la déformation longitudinale  $\varepsilon$  :

$$\sigma = \frac{\sigma_0 + \alpha M \mu \sqrt{\rho}}{\sqrt{\Lambda}} - \sqrt{\frac{1 - \exp(-y_c M \varepsilon)}{y_c}} \quad (289)$$

Cette loi est applicable aux aciers laminés si les valeurs suivantes des paramètres sont adoptées :  $\mu = 80\,000$  MPa,  $b = 2,56 \cdot 10^{-10}$  m,  $\alpha = 0,4$  et  $M = 3$ . Le lien avec la microstructure est réalisé en faisant correspondre pour cette application, le libre parcours moyen  $\Lambda$  et la taille de grain du matériau.

Pour des caractéristiques mécaniques souhaitées telles que le niveau d'écrouissage ou la résistance pratique à rupture du matériau, cette relation donne alors la taille de grain. Comme il est techniquement possible d'obtenir la taille de grain souhaitée par traitement thermique, les caractéristiques mécaniques d'un matériau en bout de chaîne de production sont contrôlables. La procédure qui consiste à ajuster le traitement de la matière en fonction des caractéristiques mécaniques est totalement opérationnelle sur les lignes de production de l'IRSID. Ce type de développement est également effectué pour des matériaux plus complexes comme par exemple, les matériaux multiphasés avec prise en compte du maillage. L'extension tridimensionnelle reste cependant à faire pour pouvoir utiliser ces lois dans les codes généraux de simulation.

### Modélisation 3G

Une voie intéressante est proposée par Montfort [66]. Il s'agit d'un modèle tridimensionnel dont la formulation fait intervenir la physique de la déformation plastique.

### Application directe des lois

Plusieurs tentatives ont déjà été effectuées. Plusieurs auteurs [2, 21, 7, 36, 95] ont utilisé les lois directement comme modèle de comportement pour prédire le comportement de mise en forme portant sur des pièces simples ou la réponse d'agrégats à des sollicitations simples. La bibliographie devient d'ailleurs assez exhaustive sur le sujet et montre que beaucoup de chercheurs pensent que cette voie est un moyen d'améliorer la modélisation du comportement plastique même si le volume des simulations demeure actuellement un obstacle majeur.

### Conclusion

Le domaine des simulations des agrégats (poly)cristallins est en plein essor. Il se heurte cependant encore à différents problèmes.

Le premier est d'ordre expérimental. Il est en effet difficile de faire des mesures à partir du moment où le nombre de grains devient important. Le nombre de données expérimentales devient très grand. La plupart des mesures sont restreintes à surface de l'échantillon. A l'opposé, la restriction de la validation d'une loi en la testant sur des agrégats cristallins, même si cela représente un travail important, ne permet pas de la solliciter dans des conditions réelles en raison de l'importante surface libre de chaque grain.

Le second problème est d'ordre numérique. La simulation d'un agrégat polycristallin avec des millions de grains n'est pas envisageable à l'heure actuelle. Le recours à d'autres solutions semble alors nécessaire avec une évolution des lois vers des formes plus intégrées mais toujours en accord avec les propriétés physiques initiales de la plasticité.





## Conclusion sur la synthèse de recherche

Ce travail concerne la modélisation de la plasticité des métaux dans le cadre de la simulation d'opérations d'emboutissage. L'objectif est d'obtenir des simulations plus fiables d'opérations d'emboutissage. On s'intéresse plus particulièrement à la modélisation du comportement plastique. Sans les opposer, on analyse les deux types de modélisations utilisées pour les matériaux métalliques.

### 1 Modélisation classique

Une première partie (sans tenir compte des rappels) est consacrée à la modélisation phénoménologique classique. Celle-ci est fondée sur une description analytique du matériau "en oubliant" son origine cristallographique de la déformation et en le considérant comme un milieu homogène idéal. Cette modélisation repose sur quelques hypothèses fortes : incompressibilité, travail plastique maximal... Quel que soit le cadre, elle nécessite la détermination incontournable d'une courbe contrainte équivalente, déformation équivalente obtenue à partir d'un essai de traction. La détection de la localisation est un des aspects associés à la modélisation de la plasticité.

Concernant cette modélisation, plusieurs points sont mis en évidence dans ce travail.

#### 1.1 Importance de la courbe d'écrouissage

L'importance de la détermination de cette courbe contrainte équivalente déformation équivalente et son incidence sur la restitution du comportement plastique doit être soulignée. Les conditions aux limites imposées par l'essai de traction sont responsables d'une localisation rapide. La mesure par extensométrie rend plus qu'incertaine la détermination du comportement local du matériau en raison de la longueur de référence imposée par la technologie de mesure. L'obtention de cette courbe est possible même lorsque la localisation commence à s'opérer en utilisant un logiciel de détermination automatique des déformations par analyse d'images à niveau de gris aléatoire de la surface de l'éprouvette. Cette mesure fine des déformations s'effectue alors avec une référence de mesure initiale beaucoup plus petite qu'avec l'extensomètre et met également en évidence des zones déchargées dans l'éprouvette.

#### 1.2 Un critère de détection de la localisation

D'après les analyses sur l'essai de traction, nous avons mis en évidence que la localisation de la déformation se manifeste par la décharge élastique d'éléments dès que la déformation se concentre dans une zone spécifique de l'éprouvette. C'est pourquoi, nous avons proposé l'adoption d'un critère de détection de la localisation qui consiste à compter les éléments déchargés au cours de la simulation. Ce critère, simple d'application, rend compte fidèlement de la localisation qui se produit.

#### 1.3 Des simulations fiables

Pour des matériaux à comportement isotrope, lorsque la courbe d'écrouissage est déterminée avec précision en s'appuyant sur la détermination automatique des déformations par analyse d'images, il est alors envisageable de simuler complètement et fidèlement une opération d'emboutissage simple où la détection de la localisation s'appuie sur le comptage d'éléments déchargés.

#### 1.4 Des limites pour les matériaux hétérogènes

Si dans le cas de matériaux homogènes au comportement quasi isotrope en trajet monotone, il semble alors possible de simuler, moyennant les précautions susmentionnées, assez fidèlement une opération de mise en forme à froid, cela devient notablement plus complexe lorsque la nature cristallographique du matériau devient prépondérante. Ainsi le titane, de structure hexagonale qui comporte peu de familles de systèmes activables a non seulement un comportement plastique anisotrope mais également très hétérogène. Ainsi, même si la détermination des coefficients d'anisotropie moyens dans le cadre d'une modélisation fondée sur le critère de Hill est possible, on s'aperçoit que la déformation se localise instantanément dans les grains bien orientés. La texture du matériau a une influence directe sur le comportement du matériau. Le comportement déterminé en traction simple n'implique qu'une partie des grains alors qu'une sollicitation biaxiale (traction compression par exemple) a toutes les chances de solliciter tous les grains. Dans ce dernier cas, les caractéristiques d'écrouissage apparaissent alors différentes comme pour un autre matériau. Un modèle classique est donc pratiquement inapplicable au cas du titane.

On comprend que la modélisation classique, même si elle s'oriente de plus en plus vers la prise en compte de phénomènes en relation avec l'origine de la plasticité atteint ses limites pour ce type de matériau.

### 2 La modélisation multi échelles

La génération de modèles multi échelles par sélection et intégration de mécanismes élémentaires responsables de

la plasticité est une autre voie. Cette activité est bien plus jeune que la modélisation phénoménologique classique (une jeune fille d'une quinzaine d'années et une octogénaire !) et elle est encore en pleine phase de croissance et d'apprentissage. La seconde partie est consacrée aux développements d'une modélisation multi échelles originale cohérente, autant que faire se peut, à tous les niveaux d'échelles envisagés.

Cette discipline couvre un large champ disciplinaire et requiert les compétences associées à différentes spécialités (physique, mécanique, numérique...). Différents points sont émergents de ce travail centré autour d'une modélisation du comportement des monocristaux de structure cubique à faces centrées.

## 2.1 Une modélisation robuste

La définition des modèles requiert une soigneuse identification des mécanismes responsables de la plasticité dans le cadre de l'application envisagée (matériau, température, vitesse de déformation...) puis la transposition à une échelle supérieure. Lorsque ce travail est effectué, les modèles obtenus sont robustes. Les identifications des paramètres physiques du modèle pratiquées à différentes échelles conduisent à l'obtention de valeurs similaires. La perception des phénomènes est également cohérente à tous les niveaux. Par exemple, l'écrouissage "cinématique" à l'échelle macroscopique est provoqué par les structures de dislocations à l'échelle microscopique qui se produisent au cours de la déformation.

## 2.2 Extension au multicristal

Ce type de modélisation est applicable au cas du multicristal en supposant que le comportement des grains est décrit par une loi monocristalline. Il est nécessaire d'imposer une condition de continuité des déplacement aux joints grains pour compléter la modélisation.

## 2.3 Extension au polycristal

C'est pour l'instant la limite de ce type de description même si plusieurs applications sont d'ors et déjà réalisées. La possibilité de lier le comportement aux paramètres microstructuraux (libre parcours moyen limité par la taille des grains par exemple) offre de nombreuses possibilités. L'IRSID a fait naître une nouvelle discipline baptisée développement de matériaux assistés par ordinateur (MAO). Pour un écrouissage donné, on détermine avec une version simplifiée des modèles, les paramètres de microstructures souhaités. Les traitements thermiques à appliquer sur le matériau pour obtenir la structure voulue sont alors déterminés et appliqués directement sur la ligne de production.

Il existe également des tentatives pour montrer que ces modèles sont applicables pour la description d'opérations de mise en forme avec des simulations où la nature polycristalline du matériau est simulée avec un nombre de grains réduit. L'orientation des grains est choisie de façon à statistiquement reproduire la texture réelle.

Ces deux axes de développement : simplification du modèle ou traitement complet sont donc les deux voies possibles pour étendre ces modèles.

## 3 Bilan

Le bilan assez positif pour la modélisation multi échelles, ne doit pas masquer les nombreuses questions qui restent encore à traiter. Les interrogations (assez nombreuses) soulevées au cours de ce travail sont présentées dans la partie perspective comme point de départ d'un projet de recherche consacré à l'amélioration de la description du comportement plastique.

Sur un plan plus général, ce travail s'insère dans le courant de pensée originale sur les modélisations multi échelles afin de mieux comprendre le comportement et d'en préciser le modèle de description quelle que soit finalement la modélisation choisie (phénoménologique ou multi échelles). La volonté de déterminer, sans (trop de) concessions, une modélisation complète du comportement des agrégats paraît d'ailleurs salutaire quelle qu'en soit l'issue. Elle conduit, à mon sens, en tout premier lieu à reposer des questions, reformuler des problèmes, établir des confrontations et proposer des concepts dans une communauté, certes très active, mais parfois prisonnière de certaines habitudes.

Ce travail voit également apparaître des applications de plus en plus nombreuses et originales :

- modélisation de la plasticité des semi-conducteurs (de type cfc...),
- modélisation de la plasticité de la glace (de type hexagonale...),
- compréhension et prédiction de la recristallisation,
- prédiction et compréhension des mécanismes d'écaillage dans les bagues de roulements (similarité avec la nano-indentation)...

Les couplages multi échelles apparaissent alors comme une des clés pour obtenir des modélisations performantes dans l'avenir et nous sommes sans doute à une période charnière quant à cette activité. Il reste encore de nombreux développements à effectuer avant de valider et fiabiliser complètement les différents concepts inhérents à ce nouveau domaine.

## Perspectives / Projet de recherche

Comme le justifie le nombre de congrès ayant pour thème la modélisation multi échelles et les applications envisageables avec ce type de modélisation, un projet de recherche centré autour de ce thème semble plus que raisonnable. Ce type de description en est encore à ses débuts et de nombreux points sont encore à éclaircir. Je compte donc poursuivre encore quelques années au moins le développement, la fiabilisation de tels modèles pour les rendre complètement opérationnels de façon à en faire des standards utilisables comme les modèles phénoménologiques classiques d'aujourd'hui. La poursuite d'un tel programme s'effectuera en réalisant au moins les différents points suivants.

### Modélisation

#### Amélioration de la modélisation proposée

La prise en compte de l'écrouissage de type cinématique m'apparaît aujourd'hui incontournable notamment pour l'aluminium. Il existe de fortes présomptions pour que cet effet provienne des contraintes générées par les agrégats polarisés de dislocations. L'écrouissage cinématique doit alors être introduit au moyen d'une contrainte à retrancher de la contrainte résolue appliquée sur un système. L'origine, dans ce cas serait restreinte aux seules dislocations du système sur lequel le calcul est effectué. Une autre voie consiste à retrancher un tenseur cinématique global du tenseur des contraintes avant projection sur les différents systèmes de glissement. Ceci revient à considérer que toutes les structures développées sur les différents systèmes ont une influence sur le système considéré. L'introduction de cette modification rend évidemment le modèle plus complexe. C'est pourquoi, je propose dans un premier temps de n'utiliser que la première proposition qui semble plus simple. Ceci aurait l'avantage de proposer une description du comportement en meilleure adéquation avec la physique. Cela étendrait également les possibilités de la loi pour traiter par exemple un trajet alterné (fatigue).

#### L'extension à d'autres structures : exemple du titane

La généralisation de ce travail à d'autres matériaux avec des structures cristallines différentes nécessite à chaque fois l'identification et la sélection des mécanismes associés à la plasticité. On envisage l'extension des travaux au cas du titane. La première étape est le recensement des mécanismes physiques actifs lorsque le titane est déformé plastiquement à froid [17,71]. Le matériau, sous forme monocristalline a une maille de type hexagonale. Même si théoriquement, plusieurs possibilités de glissement existent pour accommoder les conditions aux limites, le monocristal accepte expérimentalement seulement une à deux directions privilégiées de déformations. Ceci rend le comportement d'un grain très anisotrope et très sensible la réponse mécanique à son orientation par rapport aux directions principales de sollicitation. Le matériau texturé par laminage présente donc des grains favorablement orientés pour répondre par exemple à une sollicitation en traction alors que d'autres sont comparativement très résistants. Cette disposition explique au moins partiellement les hétérogénéités détectées au cours de la déformation. La modélisation devra intégrer les aspects suivants :

- nombre limité de systèmes de glissement avec des cissions limites initiales différentes,
- déformation accommodée par les portions vis des dislocations dont le saut d'une vallée de Peierls à une autre est contrôlé par un mécanisme de double décrochement,
- détermination du mécanisme de durcissement (forêt ?),
- effet des contraintes retour (écrouissage cinématique),
- intégration du maillage.

### Expérimentation

L'expérimentation est une activité indispensable pour la modélisation multi échelles. Elle se pratique aussi bien au niveau microscopique que macroscopique.

#### Production de monocristaux

L'identification des paramètres et la validation des modèles requièrent l'utilisation de nombreuses éprouvettes monocristallines. Il devient difficile de se procurer des matériaux monocristallins en raison de la raréfaction des sites de production. Toute une compétence qui existait, il y encore quelques années est en train de disparaître progressivement.

La production de monocristaux d'aluminium est actuellement bien maîtrisée au laboratoire. Par contre, il semble intéressant d'entreprendre la recristallisation du titane pour laquelle il existe nombreuses difficultés expérimentales. Par exemple, le mode opératoire classique (écrouissage critique) semble inopérant. De plus les traitements thermiques du titane sont problématiques car le titane est très avide d'oxygène qui modifie ultérieurement son comportement.



Néanmoins, la modélisation de ce matériau (ou des matériaux à structure hexagonale de façon plus générale<sup>16</sup>) nécessite le recours à des expériences impliquant des monocristaux. Une piste qu'il paraît intéressant de suivre est fondée sur les considérations suivantes. La recristallisation ne peut avoir lieu que lorsque le matériau a stocké suffisamment d'énergie dans les grains mesurée par une densité critique de dislocations. Or dans le titane laminé, la faible proportion de systèmes activables, rend problématique l'activation de systèmes de glissement de certains grains mal orientés pour la sollicitation. Il faut les considérer comme amorphes pour la recristallisation. Cette dernière raison est vraisemblablement à l'origine de l'impossibilité de transposer cette technique relativement efficace pour les matériaux à structure cubique à faces centrées aux matériaux à structure hexagonale. L'idée est alors d'explorer des modes de déformation peut être plus à même de provoquer une déformation homogène sur tous les grains de l'échantillon comme l'expansion.

### Développement des micros essais

Les machines classiques sont souvent trop volumineuses pour la pratique expérimentale d'essais sur éprouvette mono ou multicristalline. Principalement la mise en place de l'échantillon met en jeu des efforts bien supérieurs à la limite élastique de l'éprouvette. Cette raison et la nécessité de suivre des orientations cristallines lors de la déformation impose de développer alors des micro machines d'essai mécanique. A ce titre, une première machine d'emboutissage in-situ a déjà été développée pour appliquer des conditions aux limites complexes sur des agrégats cristallins. Il m'a paru alors nécessaire de développer une machine de cisaillement in-situ. Ces machines encore peu répandues apportent un moyen complémentaire d'exploration particulièrement bien adapté à l'étude de la plasticité en général [81] et plus particulièrement lors de la déformation de monocristaux. Cette machine est pratiquement au point et devrait notamment nous permettre de mettre en place des essais complémentaires sur les monocristaux : glissement simple, glissement multiple en condition de haute symétrie.

### Mesure des densités de dislocations

Les densités de dislocations sont des paramètres essentiels du modèle. La mesure de ces densités est encore très complexe à réaliser expérimentalement. Il paraît cependant important de les obtenir afin de valider encore plus complètement les modèles proposés. A cette fin, une collaboration est en cours avec le LPMTM de l'Université Paris-Nord (qui possède une bonne maîtrise de ces mesures [39]) sur des éprouvettes d'aluminium déjà déformées et analysées par nos soins. A terme, cependant, il paraît souhaitable de développer cette compétence au laboratoire.

### Mesure de dissipation thermique

Le développement de caméras infrarouges haute sensibilité permet de mesurer la température superficielle d'un échantillon déformé. Un traitement numérique donne accès à la puissance dissipée localement [18]. L'origine de la dissipation est principalement attribuée à la puissance  $\sigma : \dot{\epsilon}^p$  induite par la déformation plastique. Il est alors envisageable d'estimer les contraintes locales responsables de la dissipation si on effectue une mesure couplée des champs de déformation et de dissipation thermique. Ce travail conduit à déterminer l'origine exacte de la dissipation thermique. Une partie de la puissance apportée au matériau reste bloquée dans le matériau. La partie dissipée est certainement due au glissement des dislocations. Il est alors important de confronter cartographie de dissipation thermique avec des simulations éléments finis utilisant le modèle de plasticité cristalline avec différentes hypothèses concernant la partition des contraintes.

### Simulation

#### Intégration des lois dans un code industriel

Les simulations numériques sont essentiellement effectuées actuellement avec un code éléments finis développé et amélioré au laboratoire. Les développements liés à de tels outils sont longs. Il existe sur le marché des codes performants dans lesquels il est possible d'introduire une loi de comportement aussi sophistiquée soit-elle. C'est par exemple le cas d'Abaqus<sup>TM</sup>. Sur le plan pratique, il suffit de récupérer les routines d'actualisation de la version du code déjà réalisé et de les introduire dans la routine utilisateur vumat du logiciel Abaqus<sup>TM</sup>. Un travail préliminaire a déjà montré la faisabilité de l'opération même si quelques difficultés de mise en œuvre plutôt techniques sont apparues : stockage des variables, stockage des constantes... On bénéficie ainsi de la puissance de développement d'un code moderne en apportant la partie sur laquelle porte le savoir-faire. Par exemple, la prise en compte des conditions aux limites complexes permet de simuler par exemple l'essai de micro-

<sup>16</sup> Le zirconium est très largement utilisé dans les centrales nucléaires sous forme de tube à combustible. Il y un intérêt évident à prédire ses propriétés mécaniques notamment en régime de fluage. La modélisation du fluage se décline également en version multi échelles à partir de mécanismes similaires à ceux de l'étude.

emboutissage. Abaqus™ permet également de traiter des problèmes couplés en déformation et température, ce qui devrait faciliter les analyses proposées au paragraphe précédent.

### Couplage avec code de simulation de dynamique des dislocations

Les moyens numériques actuels sont suffisamment performants pour envisager une description mixte du comportement plastique. Cette simulation éléments finis repose alors sur la définition de deux lois de comportement. La première correspond à une modélisation du même type que celle de l'étude. La seconde est du type dynamique des dislocations. L'utilisation d'une loi de comportement est choisie en fonction de l'information recherchée au niveau de l'élément. Par exemple, la simulation des déformations plastiques sous un micro indenteur se ferait en utilisant la simulation du type simulation de dislocation comme description du comportement dans les éléments au contact de la pointe (figure 142). Le reste du volume serait simulé avec la modélisation à l'échelle de la densité.

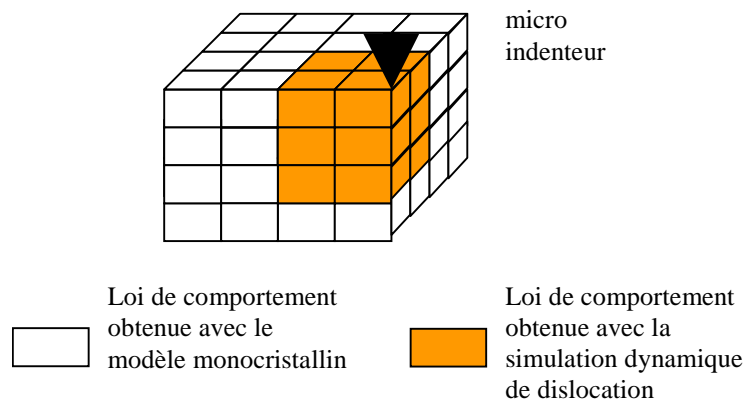


Figure 142 : Problème d'indentation traité avec une modélisation mixte dislocation / modèle monocristallin.

Pour travailler avec un pas de temps compatible avec la simulation dynamique de dislocations, la version explicite du code de simulation Abaqus™ doit être par exemple utilisée. Le traitement du problème doit s'effectuer sur un ensemble d'ordinateurs travaillant en parallèle (cluster).

Il existe deux avantages à développer une simulation de ce type qui élimineraient les inconvénients respectifs des deux codes. Des problèmes portant sur de grands volumes peuvent être traités, la durée des simulations du code de dislocations n'est plus un obstacle. Une information plus précise est apportée aux endroits les plus intéressants (sous l'indenteur par exemple).

### Application aux multicristaux

Les simulations d'essais sur multicristaux sont intéressantes pour une première validation de la loi de comportement dans le cadre de son application à des modélisations d'agrégats. Les multicristaux utilisés jusqu'à présent sont cependant insuffisamment contraints car les grains impliqués comportent de grandes surfaces libres. La difficulté pour traiter des grains internes sans surface libre d'une éprouvette multi couches réside dans la quasi-impossibilité d'obtenir leur orientation, et leur topologie. Une parade pourrait consister à agréger des éprouvettes multicristallines de façon à obtenir une couche de grains internes complètement contraints.

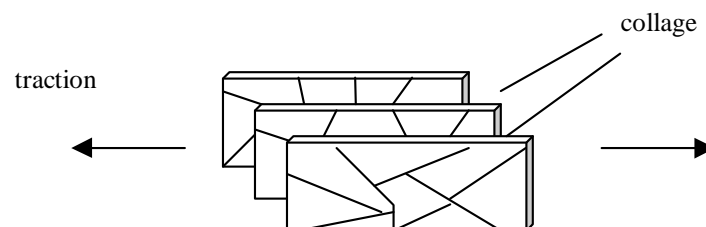


Figure 143 : Disposition d'éprouvettes multicristallines pour l'obtention de grains complètement contraints.

Des essais préliminaires ont déjà montré que l'utilisation d'une colle spécifique permet de solidariser de façon

efficace les éprouvettes durant l'essai de traction (figure 143). En dissolvant la colle après essai, on a accès à l'éprouvette intérieure. L'orientation et les déformations finales de celle-ci sont mesurables. Ce type d'essai, en imposant la déformation de grains sans surface libre devrait être beaucoup plus contraignant pour la loi. Notamment, l'écrouissage correspondant à un glissement multiple devra être finement ajusté. Ce travail est une première étape vers la simulation d'agrégats complexes.

### **Bilan**

Il reste un important travail pour faire progresser les modélisations multi-échelles. Ce type de modèle semble suffisamment prometteur pour développer un programme ambitieux qui combine à la fois développements expérimentaux, modélisation et développements numériques. Les actions proposées vont dans ce sens et s'appuient sur le savoir-faire et les potentialités de l'équipe plasticité cristalline du Laboratoire de Mécanique Appliquée.

## Bibliographie de l'activité recherche

- [1] Arizmendi D. (1999) "Simulation numérique par les méthode des éléments finis de la déformation plastique des cristaux à structure cubique centrée en utilisant un modèle basé sur les mécanismes physiques de la plasticité cristalline. Application à des essais de traction d'agrégats polycristallins de fer  $\alpha$ ", Thèse de doctorat, Université Paris 13
- [2] Aretz H., Luce R., Wolke M., Kopp R., Goedeler M., Marx V., Pomana G. and Gottstein G. (2000) "Integration of physically based models into FEM application in simulation of metal forming process", Mod. Simul. Mater. Sci. Eng., 8,881
- [3] Arrieux R. (1990) "Détermination théorique et expérimentale des courbes limites de formage en contraintes ", thèse d'état de l'Institut national des sciences appliquées de Lyon et l'Université Claude Bernard Lyon I
- [4] Ackerman F., Mughrabi H. and Seeger (1982) Communication privée référencée dans Sommer C. et al. (1998), Acta Met., 46(5), 1527
- [5] Balasubramanian S. and Anand L. (1985) J. Appl. Mech., 65, 268-271
- [6] Balland P., Tabourot L. and Fivel M. (2001) "Comparison of physically based constitutive laws used for numerical simulations of plasticity of metals", accepté pour publication dans J.Phys. IV.
- [7] Barbe F., Forest S. and Cailletaud G. (2001) " Intergranular and intragranular behavior of polycrystalline aggregates ", Int. J. of plast., 17, 537
- [8] Bassani J.L. and Wu T.Y. (1991) Proc. R. Soc. Lond. A435, 21-41
- [9] Bassani J.L. (1994) Adv. Appl. Mech., 30, 191-258
- [10] Basinski Z.S. (1959) Phil. Mag., 4, 393
- [11] Basinski S.J. and Basinsk Z.S. (1976) "Plastic deformation and work-hardening", Volume 4 of Dislocations in solids, Nabaro F.R.N. (eds), Amsterdam
- [12] Bell J.F. (1964) "A generalised large deformation behaviour for face-centred cubic solids-high purity copper" Phil. Mag. 10(103), 107-126
- [13] Bell J.F. and Green Jr R.E. (1967) "An experimental study of the double slip deformation hypothesis for face centred cubic single crystals", Phil. Mag. 15(135), 469-476
- [14] Benthmark A (1999) proceeding of Numisheet'99, Besançon France 13-17 september
- [15] Bouasiz O. (2000) "Relation microstructures et propriétés des aciers", Séminaire Mise en forme des aciers et transition d'échelles, Ecole Centrale de Paris, 11 octobre
- [16] Bowen D.K., Christian J.W. and Taylor G.I. (1967) "Deformation properties of niobium single crystals", Can. J. Phys.,45, 903
- [17] Chenau-Spat N. (1996) "Comportement de monocristaux et de polycristaux de métaux hexagonaux en grandes déformations plastiques : compression plane du titane et du magnésium", thèse de l'Institut Polytechnique de Grenoble et de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines
- [18] Chrysochoos A. and Louche H. (2000) "An infrared image processing to analyse the calorific effects accompanying strain localisation", Int. J. of Eng. Sci., 38, 1759

- [19] Conrad H. (1981) "Effect of interstitial solutes on the strength and ductility of titanium", *Progress in Material Science*, 26, 123
- [20] Cuitiño A.M. and Ortiz M. (1992) *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 1, 225-263
- [21] Dawson P.R., Beaudoin A.J. and Mathur K.K. (1992) "Simulating deformation-induced texture in metal forming", *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, Chenot, Wood & Zienkiewicz (eds)
- [22] Delaire F. (1997) "Simulation numérique du comportement élastoviscoplastique d'un multicristal. Validation expérimentale", *Thèse de doctorat*, Université de Paris-Nord
- [23] Delaire F., Raphanel J.L. and Rey C. (1997) "Plastic heterogeneities of a copper multicrystal deformed in uniaxial tension: experimental study and finite element simulations", *Acta Mater.*, 48, 1075
- [24] Devincre B. and Kubin L.P. (1994) "Simulation of forest interactions and strain hardening in fcc crystals", *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 2, 559-570
- [25] Duesberry M.S. and Foxall R.A. (1969) "A detailed study of the deformation of high purity niobium single crystals", *Phil. Mag.*, 719
- [26] Dumoulin S. (2001) "De l'utilisation d'une loi monocristalline pour la description du comportement d'agrégats polycristallins d'aluminium", *thèse de doctorat*, Université de Savoie, Annecy, France
- [27] Dumoulin S., Tabourot L., Gradel T., Fivel M. and Moreau J.M. (2000) "Identification of constitutive laws for AL99.5" *proc. of euromat 2000 conference: advances in mechanical behaviour, plasticity and damage*
- [28] Essman U. and Mughrabi H. (1979) "Annihilation of dislocations during tensile and cyclic deformation and limits of dislocations densities", *Phil. Mag. A*, 40(6), 731-756
- [29] Feaugas X. (1999) "Contribution à la compréhension des mécanismes de déformation plastique et d'endommagement des matériaux", *Mémoire d'habilitation à diriger les recherches*, Université Technologique de Compiègne
- [30] Fivel M. (1997) "Etude numérique à différentes échelles de la déformation plastique des monocristaux à structure cfc", *thèse de doctorat*, INP Grenoble, France
- [31] Fivel M., Tabourot L., Rauch E. and Canova G. (1998) "Identification through mesoscopic simulations of macroscopic parameters of physically based constitutive equations for the plastic behaviour of FCC single crystals", *J. Phys IV*, 8
- [32] Fivel M., Verdier M. and Canova G. (1997) "3D simulation of the nanoindentation test at a mesoscopic scale", *Mater Sci. Eng. A*(235-237), 923-926
- [33] Franciosi P. (1984) "Etude théorique et expérimentale du comportement élasto-plastique des monocristaux métalliques se déformant par glissement : modélisation pour un chargement quasi-statique", *thèse de doctorat*, Université Paris-Nord
- [34] Franciosi P. (1985) "The concept of latent hardening and strain hardening in metallic single crystals", *Acta Metall.*, 33, 1601
- [35] Frank F.C. and Read W.T. (1950) *Symp. on Plastic Deformation of crystalline Solids*, Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, p. 44
- [36] Frénois S., Munier E., Feaugas X. and Pilvin P. (2001) "A polycrystalline model for stress-strain behaviour of tantalum at 300K", *Proc. of 5<sup>th</sup> European mechanics of materials conference: scale transitions from atomistics to continuum plasticity*
- [37] Friedel J. (1964) "Dislocations", Pergamon Press
- [38] Germain P. and Muller P. (1980) "Introduction à la mécanique des milieux continus", Masson, Paris

- [39] Ghiath M. (1999) "Caractérisation de l'énergie stockée par diffraction des rayons X dans les multicristaux de cuivre. Effet sur la recristallisation statique", Thèse de doctorat de l'Université Paris 13
- [40] Gibbs G.B. (1969) "Thermodynamic analysis of dislocation glide controlled by dispersed obstacles", Mater. Sci. Eng. 4, 313-328
- [41] Gradel T., Tabourot L., Dumoulin S. and Castelnau O. (2000) "Plastic behaviour simulation of an AL99.5 coarse grain multicrystal during a tensile test" proc. of euromat 2000 conference: advances in mechanical behaviour, plasticity and damage
- [42] Habbad M. (1994) "Instabilités plastiques en élasto-plasticité anisotrope et grandes transformations", thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, France
- [43] Hall E.O. (1951) "The deformation and ageing of mild steel", Proc. Phys. Soc., 64(B), 747
- [44] Hansen N. (1977) "The effect of grain size on the tensile flow stress of aluminium at room temperature", Acta Met., 25, 863
- [45] Harder J. (1999) "A crystallographic model for the study of local deformation processes in polycrystals", Int. J. Plast., 15, 605-624
- [46] Hill R. (1948) "A theory of yielding and plastic flow of anisotropic metals", Proc. Roy. Soc., 193(A), 281
- [47] Hirth J.P. and Lothe J. (1982) "Theory of dislocations 2<sup>nd</sup> edition" (première édition en 1968) Wiley interscience, New York: McGraw-Hill
- [48] Hughes T.J.R. (1987) "The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis" Prentice-hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632
- [49] Inal K., Wu P.D. and Neale K.W. (1999) "Numerical simulation of earing in rolled aluminium sheets", in proceedings of int. conf. Plasticity'99, Cancun, Mexico
- [50] Jaoul B. (1965) "Etudes de la plasticité appliquée aux métaux", Dunod
- [51] Jiang Z., Lian J. and Baudelet B. (1995) "A dislocation approximation for the flow stress / grain size relation of polycrystals", Acta Met., 43(9), 3349
- [52] Klepaczko J.R. and Chiem C.Y. (1986) J. Mech. Phys. Solids Vol 34 n°1, p. 29
- [53] Kubin L.P. and Canova G. (1992) "The modelling dislocation pattern", Scripta Met. Mater., 27, 957-962
- [54] Lee E.H. (1969) "Elastic-plastic deformation at finite strain", J. Appl. Mech., 36, 1-6
- [55] Les P., Zehetbauer M. and Stüwe H.P. (1997) Mat. Sc. Forum., Vol. 242, 147
- [56] Lemaître J. et Chaboche J.L. (1996) "Mécanique des matériaux solides", Dunod, Paris
- [57] Louchet F. (2000) "Plasticité", cours Ecole Nationale Supérieure d'électrochimie et d'électrometallurgie de Grenoble, INPG
- [58] Losilla G. (2001) "Etude théorique de l'écrouissage anisotrope des métaux et caractérisation expérimentale d'une tôle laminée en traction biaxiale directe", thèse de doctorat de l'université Joseph Fourier – Grenoble I
- [59] Lücke K. und Lange H. (1952) Zeitschrift für Metallkunde., Vol. 43, 55
- [60] Malvern L.E. (1969) "Introduction to the mechanics of a continuum medium", Prentice Hall Englewood Cliffs

- [61] Martin J.L. (2000) "Dislocations et plasticité des cristaux", Presses polytechniques et universitaires romandes
- [62] Mecking H. and Estrin Y. (1987) "Microstructure related constitutive modelling of plastic deformation" in proc. of 8<sup>th</sup> Int. Symp. on Metallurgy and Material Science, Risø, Denmark
- [63] Mecking H. and Lücke K. (1970) "A new aspect of the theory of flow stress of metals", Scripta Met., 4(6), 427-432
- [64] Mecking H. and Kocks U.F. (1970) "Kinetics of flow and strain hardening", Acta Metall 29, 1865-1875
- [65] Méric L. and Cailletaud G. (1991) J. Eng. Mater. Tech. 113, 171-182
- [66] Monfort G. (1993) "A new orthotropic plasticity model for complex sheet forming", Proc. of the 4<sup>th</sup> ICTP Beijing China
- [67] Mughrabi H. (1975) "Description of the dislocation structure after unidirectionnal deformation at low temperature", Argon A.S. (eds), M.I.T. Press, London
- [68] Myagchilov S. and Dawson P.R. (1999) "Evolution of texture in aggregates of crystals exhibiting both slip and twinning", Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 7, 975-1004
- [69] Nabarro F.R.N. (1947) Proc. Phys. Soc., 59, 256
- [70] Nabarro F.R.N., Basinski Z.S. and Holt D.B. (1964) Adv. Phys., Vol. 13, p. 193
- [71] Naka S. (1983) "Etude des mécanismes de déformation plastique à basse température de monocristaux de titane  $\alpha$ ", thèse de l'université Paris-Sud
- [72] Nakamachi E., Xie C.L., Hiriwa K. and Harimoto M. (1999) "Development of elastic/crystalline viscoplastic finite element analysis code based on the meso-phenomenological material modeling", proceeding of Numisheet'99, Besançon France 13-17 september
- [73] Neuhaus R. and Schwink (1992) "On the flow stress of [100] and [111] oriented Cu-Mn single crystals: a transmission electron microscopy study", Phil. Mag. A, 65(6), 1463
- [74] Nouailhas D. and Cailletaud G. (1995) "Tension-torsion of single crystal superalloys: experiment and finite element analysis", Int. J. Plasticity, 11(4), 451
- [75] Ohashi T. (1987) Trans. Jap. Inst. Met. 28(11) 906-915
- [76] Orowan E. (1940) "Problems of plastic yielding", Proc. R. Soc. London 52, 8
- [77] Peierls R. (1940) Proc. Phys. Soc., 52, 34
- [78] Petch N.J. (1953) "The cleavage strength of polycrystals", J. Iron Steel Inst., 174, 25
- [79] Philibert J. (1979) "Dislocations et déformation plastique", Groh Kubin Mardin eds (Les éditions de la physique), 101
- [80] Pierce D., Asaro R.J. and Needleman A. (1983) Acta Met. 31(12), 1951-1976
- [81] Rauch E. (1993) "Etude l'écrouissage des métaux : aspects microstructuraux et lois de comportement", thèse d'habilitation, Institut National Polytechnique de Grenoble
- [82] Ray K.K. and Chakraborty K. (1994) "Grain size dependence of flow stress in aluminium", J. Mat. Sci. Let. ,13, 919
- [83] Schmid E. und Boas W. (1935) "Kristallplastizität", Springer Verlag, Berlin

- [84] Tabourot L. (1992) "Loi de comportement élastoviscoplastique du monocristal en grandes transformations", thèse de doctorat, INP Grenoble, France
- [85] Tabourot L., Fivel M. and Rauch E. (1997) "Generalised constitutive laws for FCC single crystals", Mater. Sci. A234-236, 639-642
- [86] Tabourot L., Fivel M. and Rauch E. (1998) "Use of mesoscopic simulation to model the dislocation densities evolution law", in proc. of 19<sup>th</sup> Risø Int. Symp. on Modelling of structure and mechanics of material from microscale to product, Risø, Denmark
- [87] Tabourot L., Fivel M. and Rauch E. (1999) "Physically based constitutive equations for FCC single crystals", proceedings of int. conf. Plasticity'99, Cancun, Mexico
- [88] Teodosiu C. (1975) "A physical theory of the finite elastic-viscoplastic behaviour of single crystals", Eng. Trans. 23(1), 157-183
- [89] Teodosiu C. and Sidoroff F. (1976) "A theory of finite elastoviscoplasticity of single crystals", Int. J. Eng. Sci. 14, 165
- [90] Teodosiu C. (1989) "The plastic spin : microstructuration and computational significance", proc. 2<sup>nd</sup> int. conf. on computational plasticity, Barcelona, Spain
- [91] Thomson A.W. and Baskes M.I. (1973) "The influence of grain size on the work—hardening of face-centered cubic polycrystals", Phil. Mag., 28(2), 301
- [92] Vacher P., Dumoulin S., Morestin F. and Mguil-Touchal S. (1999) "Bidimensionnal strain measurement using digital images", Journal of Mechanical Engineers Science part C, vol. 213, pp.811-817
- [93] Wattrise B. (1999) "Etude cinématique des phénomènes de localisation dans les aciers par intercorrélation d'image", thèse de doctorat, Université de Montpellier II, France
- [94] Wille T. and Schwink (1986) Acta Met., 34, 1059
- [95] Wu P.D., Inal K., Neale K.W., Kenny L.D., Jain M. and MacEwen S.R. (2001) "Large strain behaviour of very thin aluminium sheets under planar simple shear", Proc. of 5<sup>th</sup> European mechanics of materials conference: scale transitions from atomistics to continuum plasticity
- [96] Wyrzykowski J.W. and Grabski M.W. (1986) "The hall-Petch relation in aluminium and its dependence on the grain boundary structure", Phil. Mag. A, 53(4), 505





## VOLET I : liste des publications et travaux

### 4 Revues

- Tabourot L., Dumoulin S. and Balland P. (2001) " An attempt for a unified description from dislocation dynamics to metallic plastic behaviour " accepté pour publication dans J. Phys IV
- Balland P. Tabourot L. and Fivel M. (2000) "Comparison of physically based constitutive laws used for numerical simulations of plasticity of metals" accepté pour publication dans J. Phys IV
- Dumoulin S., Tabourot L., Chappuis L., Vacher P. and Arrieux R. (2000) "Determination of the equivalent stress-equivalent strain relation of a sample of copper in tensile loading" accepté pour publication dans J. Mat. Proc. Tech.
- Fivel M., Tabourot L., Rauch E and Canova G. (1998) "Identification through mesoscopic simulations of macroscopic parameters of physically based constitutive equations for the plastic behaviour of fcc single crystals", J. Phys IV, 8
- Vacher P., Arrieux R. and Tabourot L. (1998) "Analysis of a criterion of deep drawing operation capability for thin orthotropic sheets", J. Mat. Proc. Tech. 78, p.190-197
- Nguyen Nhat T., Arrieux R., Vacher P. and Tabourot L. (1998) "Plastic instability for off-axes loading in deep-drawing operations", J. Mat. Proc. Tech. 77, p.175-179
- Tabourot L., Fivel M. and Rauch E. (1997) "Generalised constitutive laws for FCC single crystals", Mater. Sci. A234-236, 639-642
- Vacher P., Arrieux R. and Tabourot L. "Critères d'aptitude à l'emboutissage des tôles minces orthotropes", Matériaux et Techniques, n°3-4 (1997) p.39-45.

### 5 Actes de congrès

- Tabourot L., Dumoulin S. and Balland P. (2001) "An attempt for a unified description from dislocation dynamics to metallic plastic behaviour" Proceedings of 5<sup>th</sup> European mechanics of material conference, Delft, The Netherlands, March 5-9
- Dumoulin S, Tabourot L., Gradel T, Fivel M and Moreau J.M. (2000) "identification of constitutive laws for AL99.5" proceedings of euromat 2000 conference: advances in mechanical behaviour, plasticity and damage
- Gradel T., Tabourot L., Dumoulin S. and Castelnau O. (2000) "Plastic behaviour simulation of an AL99.5 coarse grain multicrystal during a tensile test" proceedings of euromat 2000 conference: advances in mechanical behaviour, plasticity and damage
- Balland P. Tabourot L. and Fivel M. (2000) "Comparison of physically based constitutive laws used for numerical simulations of plasticity of metals", proceedings of the 4<sup>th</sup> European mechanics of material conference, Metz France 26-29 June
- Tabourot L., Fivel M. and Rauch E. (1999) "Physically based constitutive equations for FCC single crystals", proceedings of plasticity'99, Khan (Eds)
- Tabourot L., Fivel M. and Rauch E. (1998) "Use of mesoscopic simulation to model the dislocation densities evolution law", in Modelling of structure and mechanics of material from microscale to product, Cartensen, Leffers, Lorentzen, Pedersen, Sørensen (Eds), Risø
- Fivel M., Tabourot L., Rauch E. Canova G. (1998) "Identification through mesoscopic simulations of macroscopic parameters of physically based constitutive equations for the plastic behaviour of fcc single crystals", Proceedings of Euromech-Mecamat, Magdeburg -Germany, February, 23-26, p.144.
- Dumoulin S., Tabourot L., Chappuis L., Vacher P. and Arrieux R. (1998) "Determination of the equivalent stress-equivalent strain relation of a sample of copper in tensile loading" International scientific conference: Achievements in Mechanical & Material Engineering. Gliwice-Wisla Poland, Nov.30th-Dec.2st.
- Nguyen Nhat T., Arrieux R., Vacher P. and Tabourot L. (1995), "Plastic instability for off-axes solicitations in deep-drawing operations", Proceedings of the international conference on advances in material processing technology, Dublin Ireland
- Teodosiu C., Raphanel J.L. and Tabourot L. (1992) "Finite element simulation of the large elastoplastic deformation", Large plastic deformations: Fundamental aspects and applications to metal forming, Teodosiu,

Raphanel and Sidoroff Eds

## **6 Communications Congrès/Colloques/séminaires**

### **6.1 Conférencier**

Tabourot L. (2001) "An attempt for a unified description from dislocation dynamics to metallic plastic behaviour", 5<sup>th</sup> European mechanics of material conference, Delft, the Netherlands, March 5-9

Tabourot L. (2000) "simulation du comportement plastique d'une éprouvette multicristalline d'aluminium en utilisant une loi de comportement initialement dédiée à la simulation des monocristaux" séminaire Ecole Centrale Paris, 16 mai

Tabourot L., Fivel M. and Rauch E. (1999) "Physically based equations for FCC single crystals" Plasticity'99, seventh international symposium on plasticity and its current applications, Cancun, Mexico, Jan. 6-13

Tabourot L., Fivel M. and Rauch E. (1998) "Use of mesoscopic simulations to model the dislocation densities evolution law", 19<sup>th</sup> Risø International Symposium on Material Science: Modelling of structure and mechanics of materials from microscale to product, Roskilde, Denmark, Sept. 7-11

Tabourot L., Fivel M. and Rauch E. (1997) "Generalised constitutive laws for FCC single crystals", eleventh international conference on the strength of materials (ICSMA-11): fundamental aspects of the strength of crystalline materials, Prague, Czech Republic, Aug. 25-29

Tabourot L., Fivel M. and Rauch E. (1996) "Simulations de l'effet de la température lors de la déformation des monocristaux", colloque plasticité dans les Vercors 11-13 mars

Tabourot L., Rauch E., Teodosiu C. and Fivel M. (1996) "Simulations éléments finis tridimensionnelles du monocristal de cuivre utilisant une description de la plasticité fondée sur les densités de dislocations", colloque mecamat Aussois 29 jan.-1<sup>er</sup> fév.

Tabourot L., Fivel M., Rauch E. (1997) "Lois de comportement à large domaine d'applicabilité pour les monocristaux à structure cfc" journées thématiques "simulation numérique en mécanique physique" dans le cadre du GDR grandes déformations, Villetaneuse, 9-10 janvier

Tabourot L. and Teodosiu (1991) "An elastoviscoplastic constitutive law for metallic single crystals at large strains" 120<sup>th</sup> TMS annual meeting & exhibit, New Orleans, Louisiana Feb. 17-21

### **6.2 Coauteur**

Fivel M., Canova G., Rauch E. and Tabourot L. (1995) "3D simulations of the behaviour of a single crystal close to a free surface", Computer simulation in material science organisé par NATO ASI series, Ile d'Oléron 6-16 Jun

Fivel M., Canova G., Rauch E., Tabourot L. (1995) "3D simulations of the behaviour of a single crystal", Plasticity of materials organisé par European science foundation, 6-11 Sept.

Balland P., Tabourot L. and Fivel M. (2000) "Revue et comparaison des lois constitutives plastiques pour les cristallins cfc", Plasticité 2000, Saint Etienne, France, 27-29 mars

Dumoulin S. and Tabourot L. (2000) "Plasticity description of aluminium multicrystals", European Advanced Summer School: Frontiers for computational micromechanics in industrial and engineering materials", National University of Ireland, Aug. 24 –Sept.

## **7 Réalisations importantes**

1 code éléments finis pour la simulation du comportement des polycristaux

1 code d'intégration numérique des lois de comportement

1 machine d'expansion (conception originale)

1 micro-machine de cisaillement (conception originale)

## **VOLET II : Recherche : Animation / Encadrement**

### **8 Responsabilités**

Responsable pédagogique filière Maîtrise de Technologie Mécanique (1997-2001)

Responsable scientifique équipe plasticité cristalline (2000-2001)

### **9 Encadrement**

#### **9.1 Encadrement de stage maîtrise/ingénieur (les plus significatifs)**

Cédric Chappuis (1998) : analyse de l'essai de traction.

Térence Coudert (2000) : simulation d'une opération d'emboutissage.

Laurent Biolluz (2000) : relevé de données expérimentales sur une opération d'emboutissage et mise au point d'une machine d'expansion équiaxiale.

Arnaud Duchosal (2001) : conception et réalisation d'une micro-machine de cisaillement.

Frédéric Piette-Coudol (2001) : simulation d'une opération de mise en forme d'une cage intersomatique en titane.

#### **9.2 Encadrement DEA**

Marc Fivel (1993) en cotutelle avec Gilles Canova : loi de comportement des matériaux métalliques monocristallins.

Thomas Gradel (1999) : simulation du comportement d'agrégats polycristallins Al99,5.

Laurent Biolluz (2000) : Etude de l'influence de la température sur le comportement de l'aluminium monocristallin.

Olga Incandela (2000) : implantation de loi de comportement dans un code commercial.

#### **9.3 Encadrement en thèse**

Marc Fivel en cotutelle avec Gilles Canova. "Etude de la déformation plastique des monocristaux de déformations de structure cfc", thèse soutenue le 22 octobre 1997.

Stéphane Dumoulin en cotutelle avec Robert Arrieux et Pierre Vacher. "De l'utilisation d'une loi de comportement monocristalline pour décrire l'agrégat multicristallin d'aluminium" thèse soutenue le 10 mai 2001.

Thomas Gradel en cotutelle avec Robert Arrieux. Actuellement en 2<sup>ème</sup> année de thèse. "Etude de la plasticité du titane en vue de son utilisation dans des opérations d'emboutissage".

#### **9.4 Encadrement en stage post-doctoral**

Encadrement autonome de Pascale Balland pour la partie recherche de son poste d'attachée temporaire d'enseignement et de recherche.

### **10 Contrats récents**

#### **10.1 Porteur de projet**

Université (2000) : 70 kF pour l'achat d'une électro-polisseuse.

Contrat région (2000) : 550 kF pour l'achat d'un dispositif de mesure des orientations pour l'équipement du microscope électronique à balayage du site d'Annecy.

Contrat entente (1999) : 70 kF pour l'achat d'une platine XY motorisée pour l'équipement du microscope électronique à balayage du site d'Annecy.

Contrat industriel (1999) : 180kF avec la société Advanced Technical Fabrication, Marignier France pour l'étude de la plasticité du titane pour réaliser des opérations d'emboutissage.

Soit une somme de 870 kF pour soutenir l'activité.

#### **10.2 Participation**

2 contrats européens (type Copernicus) sur l'emboutissage



## **VOLET III : Rayonnement et positionnement des travaux**

### **11 Jurys de thèse**

Marc Fivel : 22 octobre 1997 (cotuteur)

Frédéric Delaire : 2 juillet 1997 (examinateur)

David Arizmendi : 23 septembre 1999 (examinateur)

Stéphane Dumoulin : 31 mai 2001 (cotuteur)

### **12 Présentations invitées**

Conférence invitée Plasticity 2002.

Exposé groupe de travail Mecamat en octobre 2001.

Deux séminaires au Laboratoire des Propriétés Mécanique et Thermodynamiques des Matériaux, Université Paris XIII.

Un séminaire au LMS/MAT de l'Ecole Centrale de Paris.

### **13 Collaborations et utilisations des travaux**

#### **13.1 Collaborations**

Collaboration avec Olivier Castelnau et Cristian Teodosiu du Laboratoire des Propriétés Mécaniques et Thermodynamiques des Matériaux. Une version dérivée du code de simulation Simultix est d'ailleurs utilisée dans ce laboratoire. La collaboration concerne d'une part la mesure d'orientation et de dislocation sur des éprouvettes multicristallines et d'autre part sur des simulations d'expériences portant sur le cisaillement d'éprouvette de cuivre monocristallin.

Collaboration avec Marc Fivel et Edgar Rauch du laboratoire de Génie Physique et Mécanique des Matériaux. La dernière version du code est également installée dans ce laboratoire. Les études portent sur le couplage entre les échelles et l'identification des lois.

Collaboration avec Jacques Allemand et Jean-Michel Moreau du Laboratoire d'Instrumentation et de Mesures d'Annecy sur des mesures d'orientations cristallines par diffractomètre 4 cercles et d'observation en microscopie à balayage.

Collaboration avec Hans Jorgen Roven de Trondheim de la Norwegian University of Science and Technology sur les micro essais sur mono et multicristaux.

Collaboration avec Guy Vanderschaeve du Centre d'Elaboration de Matériaux et d'Etudes Structurales (Toulouse) sur la plasticité des semi-conducteurs selon un schéma multi échelles.

#### **13.2 Exploitation des résultats**

La loi et surtout la démarche proposée pour obtenir la description ont été reprises, voire utilisées à ce jour dans différentes thèses récentes :

Marc Fivel : "Etudes numériques à différentes échelles de la déformation plastique des monocristaux de structure cfc", thèse INPG.

Frédéric Delaire : "Simulation numérique du comportement élastoviscoplastique d'un multicristal. Validation expérimentale", thèse Université Paris-Nord (1997).

David Arizmendi : "Simulation numérique par la méthode des éléments finis de la déformation plastique des cristaux à structure cubique centrée en utilisant un modèle basé sur les mécanismes physiques de la plasticité cristalline. Application à des essais de traction d'agrégats polycristallins de fer  $\alpha$ ", thèse Université Paris-Nord (1999).

Stéphane Dumoulin : "De l'utilisation d'une loi monocristalline pour décrire le comportement d'agrégats multicristallins", thèse LMéca (2001).

Thierry Hoc : "Etude expérimentale et numérique de la localisation de la déformation lors de changement de trajets dans un acier doux", thèse Ecole centrale de Paris (1999).

Mohamed Benblidia : "Simulations Numériques du comportement élastoplastique des monocristaux métalliques : comparaison de plusieurs formulations de l'anisotropie de l'écrouissage à l'échelle des microstructures de dislocations", thèse Paris-Nord (1997).

etc...

#### **14 Positionnement des travaux**

Les travaux mentionnés dans ce rapport sont dans le courant de recherche actuel. J'ai listé quelque titre de congrès proposés actuellement qui sont relatifs aux thèmes proposés.

2<sup>nd</sup> European mechanics of material conference, 1998: "Mechanics of materials with intrinsic length scale"

19<sup>th</sup> Risø international symposium on material science, Risø, Denmark, 1998: "modelling of structure and mechanics of materials from microscale to product"

4<sup>th</sup> European mechanics of materials conference, Metz, France, 2000: "Processes, Microstructures, Mechanical properties"

International conference on advances in materials and processing technologies, leganés, Spain, 2001

5<sup>th</sup> European mechanics of materials conference, Delft, The Netherlands, 2001: "Scale transitions from atomistic to continuum plasticity"

etc....

## Conclusion au dossier de candidature

L'habilitation est un diplôme qui témoigne d'un niveau élevé caractérisé par :

Une démarche originale dans un domaine scientifique

La maîtrise d'une stratégie autonome de recherche scientifique

La capacité à l'encadrement de jeunes chercheurs

Dans ce dossier de candidature, les différents éléments nécessaires à l'évaluation de cette demande d'agrément sont présentés.

### 1 Gestion d'un projet scientifique

Le contexte des petites universités est reconnu comme étant moins favorable que celui des grands centres. Il existe de nombreux freins pour que les jeunes maîtres de conférences puisse développer une recherche de qualité (ou faire de la recherche tout court). Cela se traduit par des responsabilités administratives, des heures d'enseignement complémentaires qu'il faut assurer pour faire tourner la machine. Le sous-encadrement technique y est également notable. C'est dans ce contexte que j'ai mené la recherche qui fait l'objet de la synthèse proposée dans ce dossier.

Le travail proposé est centré autour de l'étude du comportement plastique à froid des métaux. On se concentre plus particulièrement sur la genèse originale d'un modèle multi échelles. Le rapport présente les différents aspects relatifs à ces développements. De façon objective, on présente les points fort de la démarche et ses faiblesses.

Ce secteur d'activité est encore jeune et de nombreuses perspectives inédites sont envisagées pour le faire évoluer et améliorer la performance globale de la modélisation.

De ce point de vue, je pense valider les points "démarche originale et stratégie autonome de recherche scientifique". Ceci est également concrétisé par la responsabilité scientifique de l'équipe plasticité cristalline du Laboratoire de Mécanique Appliquée qui m'a été confiée l'an dernier.

J'ai également le souci de faire vivre cette activité en montant des projets qui ont débouché sur un certain nombre de contrats et de collaborations avec d'autres équipes de recherche.

### 2 Gestion d'équipe et encadrement

Il existe une difficulté notable qui est d'avoir un nombre d'étudiants suffisamment important pour en récupérer finalement en recherche. Ceci ne peut être réalisé qu'en s'impliquant initialement dans le développement local de filières formant des étudiants susceptibles de faire de la recherche. Je me suis donc impliqué dans la Maîtrise de Technologie Mécanique sur Annecy par le biais de ma fonction de responsable pédagogique pour alimenter le vivier d'étudiants se destinant potentiellement à la recherche. Ceci fonctionne puisque depuis 4 ans le laboratoire recrute 3 à 4 étudiants en DEA par an.

De façon directe, j'ai encadré avec sérieux et rigueur depuis plusieurs années différents étudiants en 2<sup>ème</sup> cycle et 3<sup>ème</sup> cycle et également des post doctorants. Il est difficile d'estimer le résultat et la qualité d'un encadrement. Tous ces étudiants se sont ultérieurement bien placés professionnellement. Différents articles et participations à des congrès montrent que les étudiants s'impliquent valablement dans leur travail.

Plus globalement cette aptitude à l'animation est régulièrement mise en œuvre à travers l'animation de l'équipe de recherche du laboratoire et sur un plan plus élargi l'animation de l'équipe pédagogique de la Maîtrise de Technologie Mécanique.

### 3 Bilan

Le bilan de ces différents points, la maturité intellectuelle sur le plan scientifique que j'ai acquise durant ces premières années en tant que maître de conférences me conduisent donc à proposer ma candidature à l'habilitation à diriger les recherches.